Olimpíada Pernambucana de Matemática 2018

NÍVEL 3

Caderno de Questões

LEIA COM ATENÇÃO

01. Só abra este caderno após ler todas as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. Não destaque as folhas desse caderno.

04. A primeira e a segunda questões são de proposições múltiplas; cada uma delas apresenta 5(cinco) alternativas para você decidir e marcar na coluna apropriada quais são verdadeiras e quais são falsas. As alternativas podem ser todas verdadeiras, todas falsas ou algumas verdadeiras e outras falsas. Na folha de respostas, as verdadeiras devem ser marcadas na coluna V; as falsas, na coluna F.

05. As 3(três) últimas questões são discursivas e devem ser resolvidas, no Caderno de Questões, e na página onde estão enunciadas.

06. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

07. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

08. Assinale as respostas de cada uma das 2(duas) primeiras questões no corpo da prova e, só depois, transfira os resultados para a folha de respostas.

09. Para marcar a folha de respostas, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul e faça as marcas de acordo com o modelo ● .

10. A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.

11. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.

12. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

13. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

14. Duração da prova: 4 horas.

Nome: ____

Identidade: ____________________ Órgão Expedidor: ____________________

Assinatura: ____

01. As irmãs Joana e Lívia aniversariam em 17 de fevereiro e em 03 de março, respectivamente. Elas observaram que frequentemente as datas de seus aniversários ocorrem no mesmo dia da semana, como aconteceu em 2017 e 2018. Neste último ano, os aniversários de ambas ocorreram no sábado. Sabendo que 2016 foi um ano bissexto, analise as afirmações a seguir, e marque (V) se a afirmação for verdadeira e (F) se a afirmação for falsa.

A – (V) (F) Em 2019, as datas dos aniversários de ambas ocorrerão em domingos.

B – (V) (F) Em 2020, Joana aniversariará em uma segunda-feira e Lívia, em uma terça-feira.

C – (V) (F) Em 2021, as irmãs farão aniversários em dias diferentes da semana.

D – (V) (F) Se Joana nasceu em 1958, então o dia de seu nascimento ocorreu em uma segunda-feira.

E – (V) (F) Supondo que Joana nasceu em 1958, que a diferença das idades delas é menor do que 8 anos e que Lívia nasceu em uma terça-feira então o ano de nascimento de Lívia é 1963.

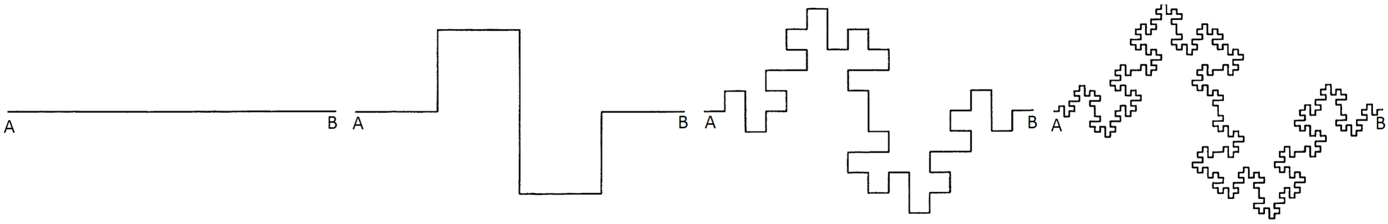
ESPAÇO PARA RASCUNHO:

PÁGINA PARA RASCUNHO:

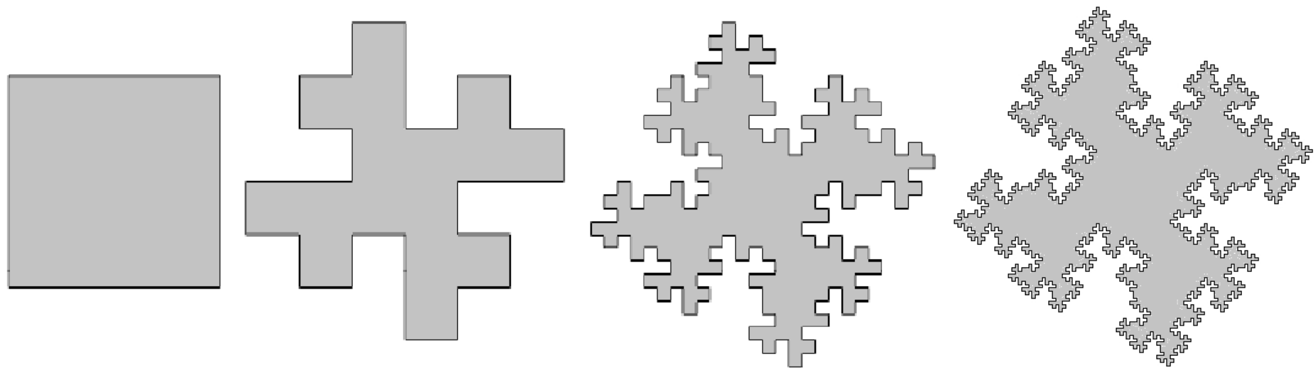
02. A curva de Minkowski é um fractal que possui várias aplicações industriais. Sua forma, por exemplo, é utilizada na construção de antenas compactas para recepção de conexões sem fio (wireless) para celulares. Tal curva é construída por meio de um processo iterativo infinito da seguinte forma:

- Divida um segmento horizontal $\overline{AB}$ medindo L unidades de comprimento em quatro segmentos de medidas iguais.
- Construa um quadrado com lado $\dfrac{L}{4}$ unidades de comprimento acima do segundo segmento, tendo este como um de seus lados, construa outro quadrado com lado de mesma medida abaixo do terceiro segmento, tendo este como um de seus lados e remova o segundo e terceiro segmentos.
- A partir da segunda iteração repetimos esse processo para cada um dos segmentos de mesma medida formados na iteração anterior.

As três primeiras iterações podem ser vistas na figura abaixo:



Se iniciarmos com um quadrado de lado L e para cada lado do quadrado repetimos a construção descrita acima, obteremos a chamada ilha de Minkowski. As três primeiras iterações podem ser observadas na figura abaixo.



Com base nas construções acima, analise as afirmações a seguir e marque (V) se a afirmação for verdadeira e (F) se a afirmação for falsa.

A – (V) (F) A diferença entre os comprimentos das poligonais obtidas na quarta e terceira iteração da curva de Minkowski é $2L$ unidades de comprimento.

B – (V) (F) A área da ilha de Minkowski é igual a L^2 unidades de área.

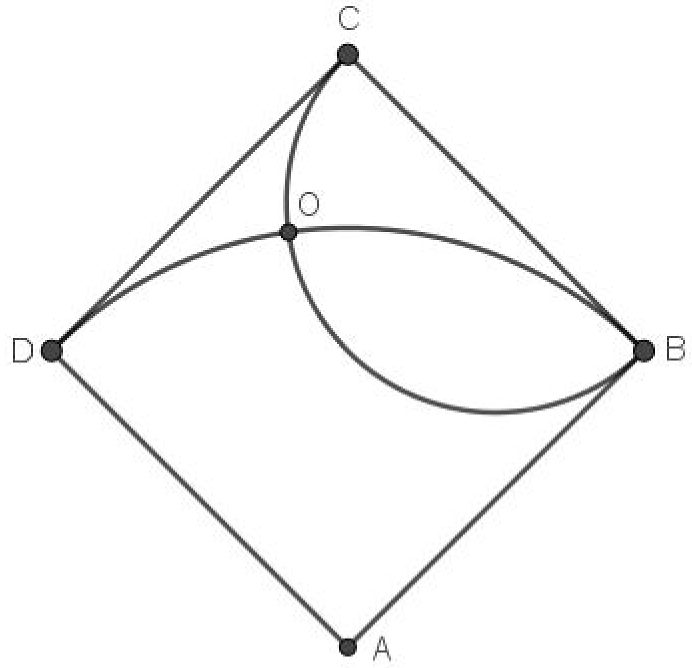
C – (V) (F) Se $L = 1$ unidade de comprimento, o perímetro da ilha de Minkowski é maior do que 1 milhão de unidades de comprimento.

D – (V) (F) A distância do ponto mais alto da curva de Minkowski ao segmento $\overline{AB}$ é $\dfrac{L}{3}$ unidades de comprimento.

E – (V) (F) A área da região localizada abaixo da curva de Minkowski e acima do segmento $\overline{AB}$ mede $\dfrac{L^2}{8}$ unidades de área.

PÁGINA PARA RASCUNHO:

03. Na figura abaixo, temos um quarto de uma circunferência de raio l e uma semicircunferência.

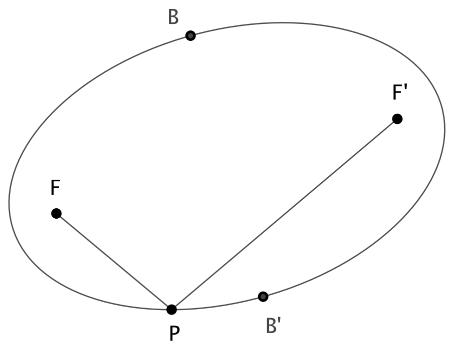


Sabendo que $ABCD$ é um quadrado. Determine a área do triângulo ΔADO.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO **03:**

CONTINUAÇÃO DA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO **03:**

04. Dados F e F' pontos distintos fixados do plano e a um número real tal que $2a > \overline{FF'}$. O lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\overline{FP} + \overline{PF'} = 2a$ é uma curva chamada *elipse*, representada pela figura a seguir.

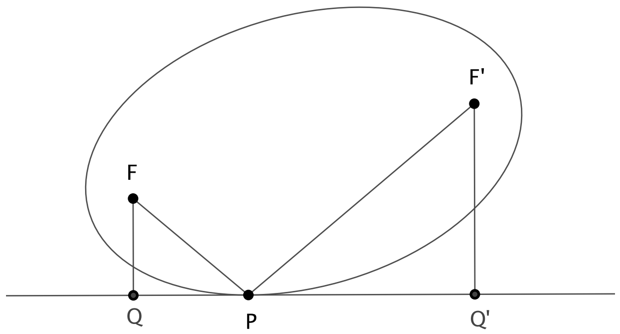


Sejam B e B' as interseções da mediatriz de FF' com a elipse e suponha que $\overline{FF'} = 2c$ e $\overline{BB'} = 2b$.

(a) Verifique a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

(b) Mostre que a reta bissetriz do ângulo formado pelo segmento PF e a semirreta oposta a semirreta $\overrightarrow{PF'}$ possui apenas o ponto P em comum com a elipse. Tal bissetriz é a *reta tangente* a elipse no ponto P.

(c) Sejam Q e Q', respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas dos pontos F e F' à reta tangente a elipse no ponto P, conforme figura abaixo. Demonstre que $\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} = b^2$.



ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO **04:**

CONTINUAÇÃO DA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO **04:**

05. Alice e Clarinha estavam estudando para as olimpíadas de matemática e encontraram o seguinte problema

" Dado $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, existe uma lista formada por n inteiros positivos consecutivos contendo apenas um único número primo?"

Elas perguntaram para tio DK: "Isso é verdade?"

Tio DK respondeu: "Vamos ver! Para $n = 2$ é fácil encontrar exemplos disso. Se p é primo, então "$p, p+1$" ou "$p-1, p$" formam listas de $n = 2$ números inteiros positivos e consecutivos com apenas um primo. Analogamente se $n = 3$ e p é um primo maior do que 3, então "$p-1, p, p+1$" é uma lista com $n = 3$ inteiros positivos consecutivos com apenas um número primo". Depois disso, tio DK propôs:

(a) Exibam uma lista com 13 inteiros consecutivos contendo apenas um número primo.

(b) Agora verifiquem se é verdade que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, existe uma lista formada por n inteiros positivos consecutivos contendo apenas um único número primo.

Faça o que tio DK propôs !

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO **05:**

CONTINUAÇÃO DA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO **05:**

PÁGINA EXTRA PARA CONTINUAÇÃO DA RESOLUÇÃO DE ALGUMA QUESTÃO: