Olimpíada Pernambucana de Matemática 2018

NÍVEL 2

Caderno de Questões Com Resoluções

UFRPE

OPEMAT

LEIA COM ATENÇÃO

01. Só abra este caderno após ler todas as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. Não destaque as folhas desse caderno.

04. A primeira e a segunda questões são de proposições múltiplas; cada uma delas apresenta 5(cinco) alternativas para você decidir e marcar na coluna apropriada quais são verdadeiras e quais são falsas. As alternativas podem ser todas verdadeiras, todas falsas ou algumas verdadeiras e outras falsas. Na folha de respostas, as verdadeiras devem ser marcadas na coluna V; as falsas, na coluna F.

05. As 3(três) últimas questões são discursivas e devem ser resolvidas, no Caderno de Questões, e na página onde estão enunciadas.

06. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

07. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

08. Assinale as respostas de cada uma das 2(duas) primeiras questões no corpo da prova e, só depois, transfira os resultados para a folha de respostas.

09. Para marcar a folha de respostas, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul e faça as marcas de acordo com o modelo ● .

10. A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.

11. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.

12. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

13. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

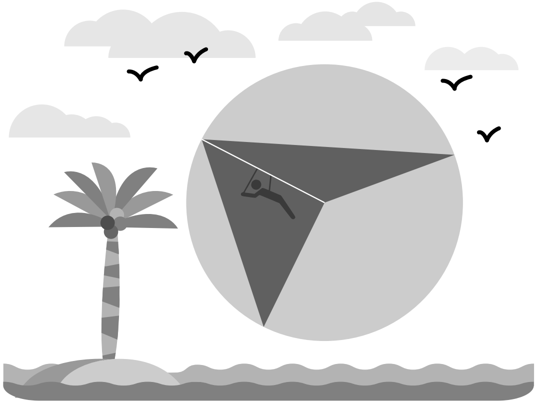
14. Duração da prova: 4 horas.

NOME: ____

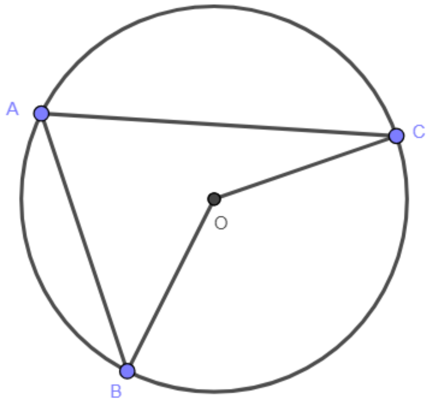
IDENTIDADE: ____________________ ÓRGÃO EXPEDIDOR: ____________________

ASSINATURA: ____

01. Davi, inspirado, desenhou a seguinte paisagem de um fim de tarde com uma pessoa num voo livre de asa-delta.



Seu pai Clessius, que é matemático, percebeu que poderia representar o desenho por meio do esquema abaixo.



Nesta figura, temos uma circunferência de centro O e os pontos A,B e C pertencem à circunferência. Para os fins desta questão, a notação $X\widehat{Y}Z$ indica o menor ângulo de vértice Y e lados $\overrightarrow{YX}$ e $\overrightarrow{YZ}$.

Com base nas informações acima, analise afirmações a seguir, e marque (V) se a afirmação for verdadeira e (F) se a afirmação for falsa.

A - (V) (F) A medida do ângulo $B\widehat{O}C$ é igual ao dobro da soma das medidas dos ângulos $O\widehat{B}A$ e $O\widehat{A}C$.

B - (V) (F) Se a medida do ângulo $O\widehat{B}A$ é 40º e o ângulo $O\widehat{C}A$ mede 50º então o segmento $\overline{BC}$ tem medida igual ao diâmetro da circunferência.

C - (V) (F) Se os ângulos $O\widehat{A}B$ e $O\widehat{C}A$ são congruentes, então o triângulo formado pelos vértices A, B e C é equilátero .

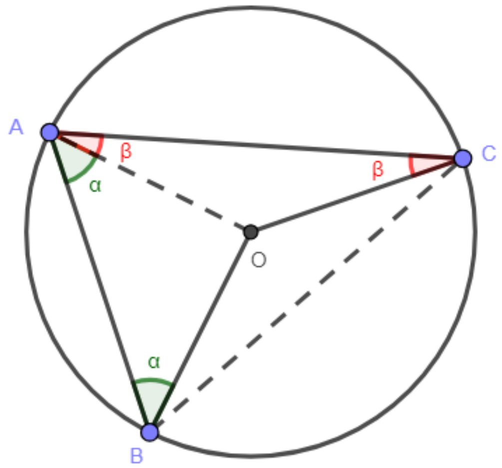
D - (V) (F) Se os ângulos $O\widehat{B}A$ e $O\widehat{C}A$ medem, respectivamente, 10º e 20º, então os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{BO}$ possuem a mesma medida.

E - (V) (F) Se o triângulo formado pelos vértices A, B e C é equilátero e a medida do seu lado é $2\sqrt{3}$ unidades de comprimento, então o raio da circunferência mede 2 unidades de comprimento.

RESPOSTAS DA QUESTÃO 01: V V F V V.

RESOLUÇÃO:

A fim de facilitar o entendimento da resolução, traçaremos os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{BC}$. Além disso, perceba que os triângulos ΔOBA e ΔOAC são ambos isósceles, pois dois de seus lados são raios da circunferência. Assim, denotando por α as medidas de $O\widehat{B}A$ e $B\widehat{A}O$ e β a medida dos ângulos $O\widehat{A}C$ e $O\widehat{C}A$, ficamos com o seguinte esquema:



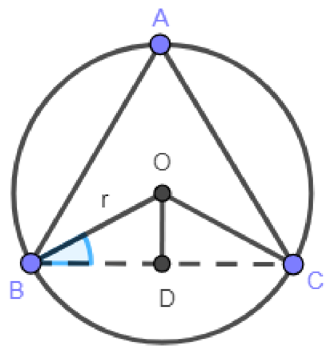
A – (V) Afirmação verdadeira. Perceba que a medida do ângulo $C\widehat{O}A$ é $180^o - 2\beta$ e a medida do ângulo $B\widehat{O}A$ é $180^o - 2\alpha$. Assim a medida do ângulo $B\widehat{O}C$ é $360^o - [180^o - 2\beta] - [180^o - 2\alpha] = 2(\alpha + \beta)$.

B – (V) Afirmação verdadeira. Pelo item anterior, o ângulo $B\widehat{O}C$ tem medida igual a $2(40^o + 50^o) = 180^o$. Portanto, os pontos B, O e C são colineares. Como O é o centro da circunferência então $\overline{BC}$ é um diâmetro.

C – (F) Afirmação falsa. Vamos dar um contra-exemplo. Perceba que no caso $\alpha = \beta = 15^o$, o triângulo ΔABC teria o ângulo $B\widehat{A}C$ medindo 30^o, logo não é equilátero.

D – (V) Afirmação verdadeira. Pelo item (A), o ângulo $B\widehat{O}C$ tem medida 60^o. Como o ΔOBC é isósceles, pois dois de seus lados são raios da circunferência, segue que ele é equilátero.

E – (V) Afirmação verdadeira. Considere a figura abaixo:



Nesta situação, como ΔABC é equilátero, então o ângulo $B\widehat{A}C$ mede 60^o. Pelo item (A), o ângulo $B\widehat{O}C$ mede 120^o. Como o triângulo ΔOBC é isósceles, então o ângulo $O\widehat{B}D$ mede 30^o. Sendo D o ponto médio do lado $\overline{BC}$ então o ângulo $O\widehat{D}B$ é reto e o segmento $\overline{BD}$ mede $\sqrt{3}$ unidades de comprimento. Assim, $\cos(30^o) = \dfrac{\sqrt{3}}{r}$, portanto $r = 2$ unidades de comprimento.

02. Vamos construir uma sequência de n triângulos retângulos

$$\Delta_1 = \Delta_{\mathrm{A_1BC_1}},\ \Delta_2 = \Delta_{\mathrm{A_2BC_2}},\ \Delta_3 = \Delta_{\mathrm{A_3BC_3}}, \cdots, \Delta_{\mathrm{n-1}} = \Delta_{\mathrm{A_{n-1}BC_{n-1}}} \text{ e } \Delta_{\mathrm{n}} = \Delta_{\mathrm{A_nBC_n}},$$

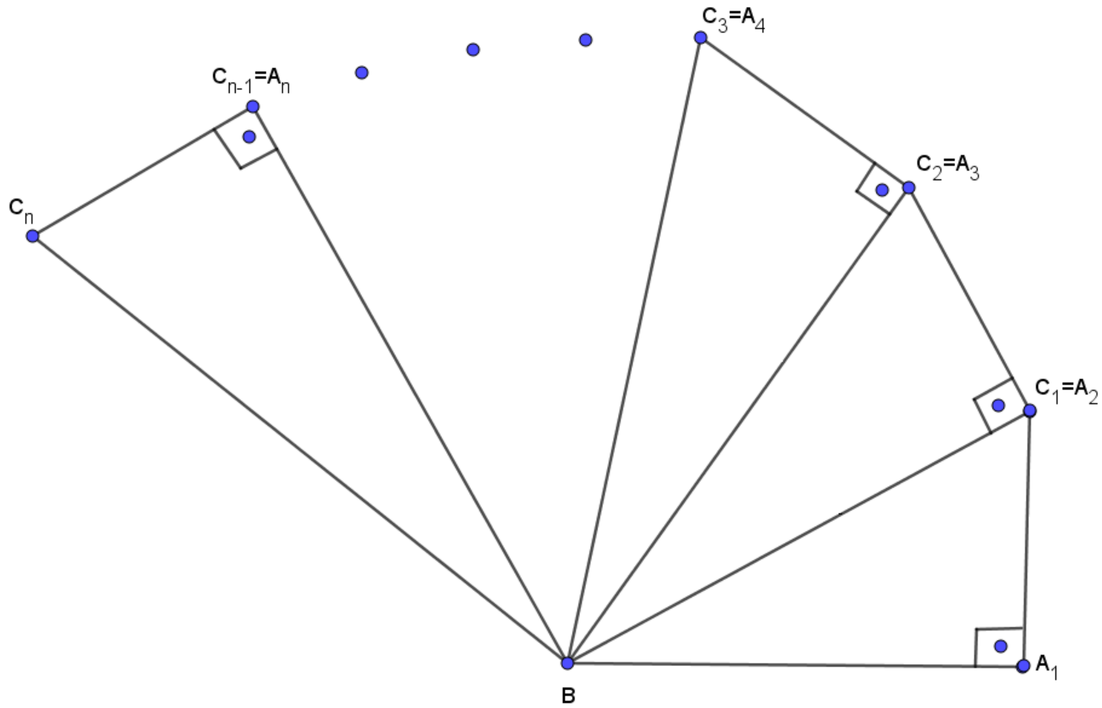
de maneira que

i) $\mathrm{B\hat{A}_1C_1} = \mathrm{B\hat{A}_2C_2} = \cdots = \mathrm{B\hat{A}_nC_n} = 90^o$;

ii) Os catetos opostos ao vértice B são congruentes;

iii) A hipotenusa de um triângulo corresponde ao cateto adjacente ao vértice B do triângulo imediatamente posterior, exceto para o último triângulo.

Esta situação está ilustrada na figura abaixo:



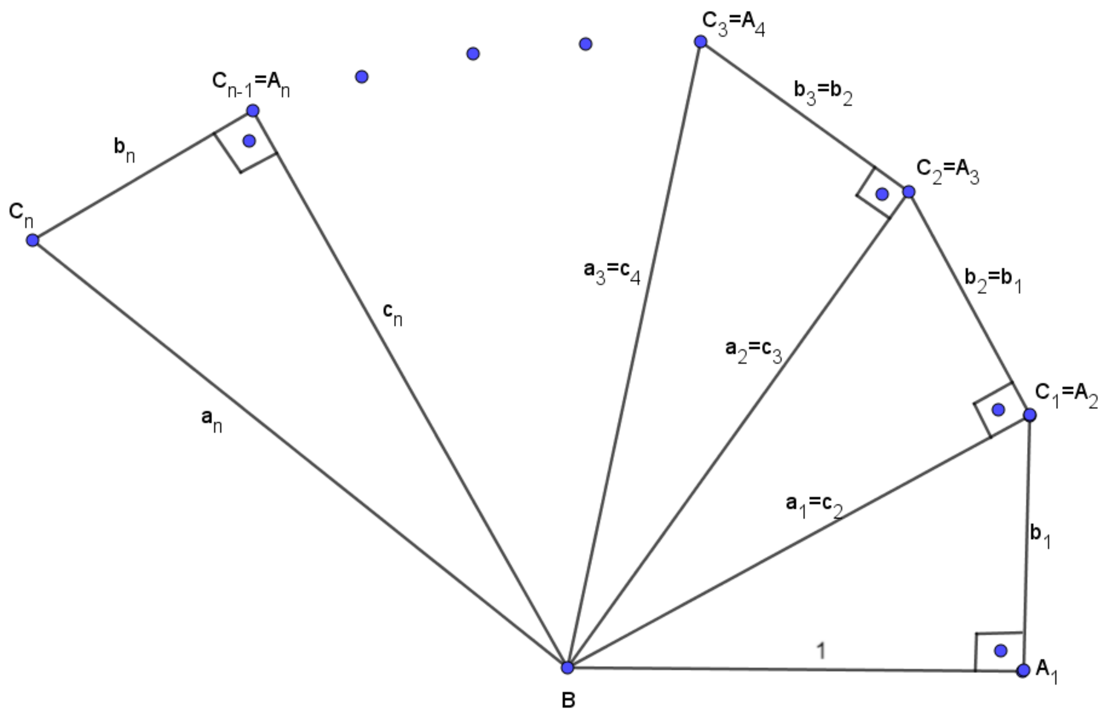
Se o segmento BA_1 mede 1 unidade de comprimento e o segmento A_1A_2 tem medida inteira, analise as afirmações a seguir, e marque (V) se a afirmação for verdadeira e (F) se a afirmação for falsa.

A - (V) (F) Podemos ter uma sequência em que a hipotenusa do último triângulo mede 7 unidades de comprimento.
B - (V) (F) A maior sequência cuja hipotenusa do último triângulo mede 13 unidades de comprimento é formada por 160 triângulos.
C - (V) (F) Se em uma sequência a hipotenusa de algum triângulo mede $\sqrt{10}$ unidades de comprimento, então as possibilidades para a medida do cateto oposto ao vértice B do primeiro triângulo são $1, 2$ e 3 unidades de comprimento.
D - (V) (F) Se em uma sequência, a hipotenusa de algum triângulo mede $\sqrt{84}$ unidades de comprimento, então a próxima hipotenusa com menor medida inteira mede 10 unidades de comprimento.
E - (V) (F) Se o segmento A_1A_2 mede 4 unidades de comprimento, então a primeira hipotenusa com medida inteira ocorre no 5^o triângulo.

RESPOSTAS DA QUESTÃO 02: V F F V F.

RESOLUÇÃO:

A fim de facilitar o entendimento da resolução, utilizaremos as notações conforme a figura abaixo.



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo A_1BC_1, obtemos

$$a_1^2 = b_1^2 + 1^2.$$

Agora, aplicando teorema de Pitágoras ao triângulo A_2BC_2, obtemos

$$a_2^2 = b_2^2 + c_2^2.$$

As duas equações anteriores nos dão

$$a_2^2 = b_1^2 + [b_1^2 + 1] = 2 \cdot b_1^2 + 1.$$

Repetindo o mesmo argumento para os próximos triângulos, encontramos a relação geral,

$$a_n^2 = n \cdot b_1^2 + 1.$$

A – (V) Afirmação verdadeira. Note que se $a_n = 7$ unidades de comprimento, para algum n, então ficamos com a seguinte relação:

$$7^2 = n \cdot b_1^2 + 1,$$

Então $n \cdot b_1^2 = 48$, temos por exemplo a solução $n = 3$ e $b_1 = 4$ unidades de comprimento.

B – (F) Afirmação falsa. Usando o mesmo raciocínio, o teorema de Pitágoras no último triângulo nos dá

$$13^2 = n \cdot b_1^2 + 1,$$

segue que

$$n \cdot b_1^2 = 168.$$

Note que a maior sequência é quando $b_1 = 1$ unidade de comprimento e $n = 168$.

C – (F) Afirmação falsa. Utilizando o Teorema de Pitágoras em tal triângulo, obtemos,

$$(\sqrt{10})^2 = n \cdot b_1^2 + 1,$$

donde,

$$n \cdot b_1^2 = 9 = 1 \cdot 3^2.$$

Assim, as únicas possibilidades para a medida de b_1 são $b_1 = 1$ ou $b_1 = 3$ unidades de comprimento.

D – (V) Afirmação verdadeira. Utilizando o teorema de Pitágoras em tal triângulo, obtemos,

$$(\sqrt{84})^2 = n \cdot b_1^2 + 1,$$

o que nos dá $n \cdot b_1^2 = 83$, cuja única solução é $b_1 = 1$ unidades de comprimento, pois 83 é um número primo. Utilizando sucessivamente o teorema de Pitágoras, vamos obter as seguintes medidas para as hipotenusas dos próximos triângulos:

$$\sqrt{85}, \sqrt{86}, \sqrt{87}, \cdots, \sqrt{98}, \sqrt{99}, \sqrt{100} = 10.$$

E – (F) Afirmação falsa. O teorema de Pitágoras nos dá

$$a_n^2 = n \cdot 4^2 + 1,$$

Assim, para $n = 3$ obtemos $a_n = 7$ unidades de comprimento.

03. Os Youtubers Pedro Henrique (PH), Lorenzo Walker (LW) e João Miguel (JM) produzem vídeos sobre jogos virtuais. No dia 20 de outubro de 2018, cada um deles postou simultaneamente um vídeo comentando o jogo "Fórti Naiti". Na primeira hora após a postagem, cada um dos vídeos já possuia mais de 1000 visualizações que somadas totalizavam 7500. Sabendo que, na primeira hora, os números de visualizações dos vídeos de PH e de LW são ambos quadrados perfeitos e que a quantidade de visualizações do vídeo de PH é obtida a partir da quantidade de visualizações do vídeo de LW da seguinte forma:

- Somando 5 ao dígito das unidades;
- Subtraindo 2 do dígito das dezenas;
- Somando 5 ao dígito das centenas;
- Subtraindo 2 do dígito das unidades de milhar.

Com base nestas informações, determine o número de visualizações de JM.

RESOLUÇÃO:

Etapa 1. Note que os números de visualizações de cada vídeo, na primeira hora, são compostos por 4 dígitos, pois são maiores do que 1000 e somam 7500. Seja

UM	C	D	U
x	y	z	w

o número que representa a quantidade de visualizações do vídeo de LW, em que x, y, z e w são dígitos que representam a unidade de milhar, a centena, a dezena e a unidade, respectivamente. Como este número é um quadrado perfeito, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$1000x + 100y + 10z + w \;=\; m^2.$$

Pelas informações descritas no enunciado, a quantidade de visualizações do vídeo de PH é representada pelo seguinte número de 4 dígitos:

UM	C	D	U
$x-2$	$y+5$	$z-2$	$w+5$

Como este número também é um quadrado perfeito, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} 1000(x-2) + 100(y+5) + 10(z-2) + (w+5) \;&=\; n^2 \Rightarrow \\ 1000x + 100y + 10z + w - 1515 \;&=\; n^2. \end{aligned}$$

Etapa 2. Isso resulta no seguinte sistema

$$\begin{cases} 1000x + 100y + 10z + w \;=\; m^2 \\ 1000x + 100y + 10z + w - 1515 \;=\; n^2 \end{cases}.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, no sistema anterior, obtemos

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 \;&=\; [1000x + 100y + 10z + w] - [1000x + 100y + 10z + w - 1515] \Rightarrow \\ (m-n)(m+n) \;&=\; 1515. \end{aligned}$$

Etapa 3. Agora observe que 1515 pode ser escrito como produto de dois números naturais apenas de quatro maneiras distintas:

$$1515 = 1 \cdot 1515 = 3 \cdot 505 = 5 \cdot 303 = 15 \cdot 101.$$

Como $m, n \in \mathbb{N}$ temos que $m+n > m-n$. Assim, há apenas quatro sistemas possíveis para determinar os valores de m e n.

Etapa 4. Vamos analisar cada caso.

Caso 1.

$$\begin{cases} m-n &= 1 \\ m+n &= 1515 \end{cases} \Rightarrow\ m = 758\ \Rightarrow\ m^2 = 574564.$$

Caso 2.

$$\begin{cases} m-n &= 3 \\ m+n &= 505 \end{cases} \Rightarrow\ m = 254\ \Rightarrow\ m^2 = 64516.$$

Caso 3.

$$\begin{cases} m-n &= 5 \\ m+n &= 303 \end{cases} \Rightarrow\ m = 154\ \Rightarrow\ m^2 = 23716.$$

Nos três casos anteriores observe que m^2 é um número com mais de 4 dígitos, o que não satisfaz o problema visto que os números de visualizações têm 4 dígitos.

Caso 4.

$$\begin{cases} m-n &= 15 \\ m+n &= 101 \end{cases} \Rightarrow\ m = 58 \text{ e } n = 43 \Rightarrow\ m^2 = 3364 \text{ e } n^2 = 1849.$$

Assim, na primeira hora, PH teve $n^2 = 1849$ e LW teve $m^2 = 3364$ visualizações. Como a soma das visualizações dos três vídeos é 7500, concluímos que JM teve 2287 visualizações.

04. O professor Rodrigo, lendo o jornal "É Matemática, Oxente!" do Departamento de Matemática da UFRPE, viu um problema que achou interessante e propôs aos seus alunos a seguinte adaptação:

Num famoso programa de auditório o apresentador ofereceu o prêmio de um milhão de reais para quem respondesse corretamente a seguinte pergunta:

Se escrevermos os números de 1 até 5.000 consecutivamente, formamos o seguinte número

$$12345678910111213\cdots 4997499849995000.$$

No número acima, quantas vezes 12 aparece?

RESOLUÇÃO:

Vamos analisar cada um dos casos de ocorrência do número 12. Para facilitar a análise, considere a sequência a seguir:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \cdots, 4997, 4998, 4999, 5000.$$

Isso nos permite enxergar de maneira mais simples que 12 pode aparecer em três situações distintas:

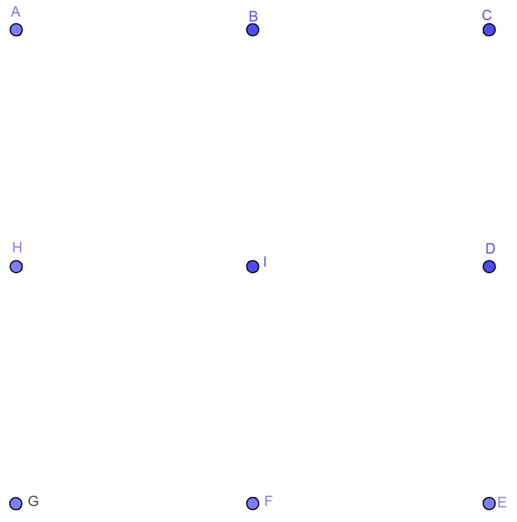
1. Os dois primeiros números formam a primeira ocorrência;
2. Em um único número (ex: 127 ou 4123);
3. Em números consecutivos onde um número termina em 1 e o próximo inicia com 2 (ex: 211,212 ou 2371,2372);

Vamos então aos cálculos.

1. Nos dois primeiros dígitos 1,2 temos um total de 1 ocorrência.
2. Ocorrências em que 12 aparece em números de 2,3 e 4 dígitos:
   (i) Para números com 2 algarismos temos apenas 1 ocorrência que é o número 12.
   (ii) Para números com 3 algarismos temos as seguintes ocorrências: $x12$ totalizando 9 possibilidades pois x não pode ser 0. Temos também números da forma $12x$, totalizando 10 possibilidades. Total de ocorrências $9 + 10 = 19$.
   (iii) Para números com 4 algarismos temos as seguintes ocorrências: $xy12$ totalizando 40 possibilidades, pois x só pode ser não $1, 2, 3$ ou 4. Temos também números da forma $x12y$ também com um total de 40 possibilidades, pois novamente x só pode ser $1, 2, 3$ ou 4. Por fim, em números da forma $12xy$ com um total de 100 possibilidades. Total de ocorrências $40 + 40 + 100 = 180$.
3. Agora consideraremos as ocorrências em que 12 aparece em números que terminam com o algarismo 1 e seu sucessor inicia com 2. Temos as seguintes ocorrências:
   (i) Em números de 2 dígitos: $x1, 2y$. Como são consecutivos a única possibilidade é $21, 22$, ou seja, temos 1 ocorrência;
   (ii) Em números de 3 dígitos: $xy1, 2ab$. Por serem consecutivos, devemos ter $x = 2$, $y = a$ e $b = 2$. Logo tais números consecutivos são da forma $2y1, 2y2$ e isso nos dá 10 ocorrências;
   (iii) Em números de 4 dígitos: $xyz1, 2abc$. Novamente, como são consecutivos teremos $x = 2$, $y = a$, $z = b$ e $c = 2$. Logo tais números consecutivos são da forma $2yz1, 2yz2$, totalizando 100 ocorrências.

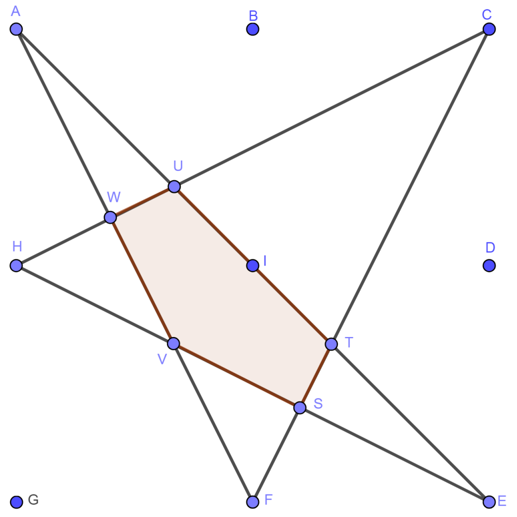
Assim, o total de ocorrência é 1 + 1 +19 +180 +1 +10 +100= 312.

05. É comum encontrar em alguns tipos de aparelhos celulares um sistema de desbloqueio conforme figura abaixo:



Com base na figura acima, a distância entre quaisquer dois pontos adjacentes, na horizontal ou na vertical é igual a l unidades de comprimento.

Um código de desbloqueio nesse sistema consiste em ligar alguns pontos, formando uma linha poligonal aberta. Suponha que fosse possível utilizar um código de desbloqueio formando a poligonal fechada $AEHCFA$, conforme figura abaixo.



Determine a área hachurada em função de l.

RESOLUÇÃO:

Observe que os triângulos ΔIUC, ΔTCI, ΔVEI e ΔVAI são congruentes pelo caso L.A.L.. Note também que ΔSTE e ΔWUA são congruentes devido à simetria da figura. Além disso, perceba que V é o baricentro de ΔIHF, pois olhando para o retângulo $HDEG$ percebemos que HE contém a mediana em relação ao vértice H, olhando para o retângulo $ABFG$ percebemos que AF contém a mediana em relação ao vértice F e GI contém a mediana em relação ao vértice I.

Outra informação importante é que o triângulo ΔSTE é semelhante ao triângulo ΔIUC pelo caso A.A. (ou a quaisquer outros congruentes a este), pois o ângulo $U\widehat{C}I$ é congruente ao ângulo $S\widehat{E}T$ e o ângulo $C\widehat{T}E$ é congruente ao ângulo $A\widehat{U}C$.

Vamos encontrar as áreas dos triângulos ΔIUC e ΔSTE. Para isto, observe que da congruência dos triângulos ΔIUC, ΔTCI, ΔVEI e ΔVAI temos $UI = IT = VI := L$. Como V e o baricentro do triângulo ΔIHF, então

$$L = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l = \frac{\sqrt{2}}{3} l.$$

Assim,

$$\text{Área}(\Delta IUC) = \frac{\sqrt{2}l \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{3} l}{2} = \frac{l^2}{3}.$$

Do triângulo ΔIUC, temos $UI = \dfrac{\sqrt{2}}{3} l$ e IC=$\sqrt{2}l$. Assim, pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo ΔIUC, concluímos que $UC = \dfrac{2\sqrt{5}}{3} l$. Observe que $TE = IE - IT = IE - L = \sqrt{2}l$ - $\dfrac{\sqrt{2}}{3} l = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} l$. Como o triângulo ΔIUC é semelhante ao triângulo ΔSTE encontramos $TS = \dfrac{2\sqrt{5}}{15} l$ e $SE = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} l$.

Logo,

$$\text{Área}(\Delta STE) = \frac{\dfrac{2\sqrt{5}}{15} l \cdot \dfrac{2\sqrt{5}}{5} l}{2} = \frac{2}{15} l^2.$$

Por fim, observe que a Área$(VSTIUW) = 2.$Área$(\Delta IUC) - 2.$Área(ΔSTE)= $2.\dfrac{1}{3} l^2$ - $2.\dfrac{2}{15} l^2$=$\dfrac{2}{5} l^2$.