Olimpíada Pernambucana de Matemática 2018

NÍVEL 1

Caderno de Questões Com Resoluções

LEIA COM ATENÇÃO

01. Só abra este caderno após ler todas as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. Não destaque as folhas desse caderno.

04. A primeira e a segunda questões são de proposições múltiplas; cada uma delas apresenta 5(cinco) alternativas para você decidir e marcar na coluna apropriada quais são verdadeiras e quais são falsas. As alternativas podem ser todas verdadeiras, todas falsas ou algumas verdadeiras e outras falsas. Na folha de respostas, as verdadeiras devem ser marcadas na coluna V; as falsas, na coluna F.

05. As 3(três) últimas questões são discursivas e devem ser resolvidas, no Caderno de Questões, e na página onde estão enunciadas.

06. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

07. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

08. Assinale as respostas de cada uma das 2(duas) primeiras questões no corpo da prova e, só depois, transfira os resultados para a folha de respostas.

09. Para marcar a folha de respostas, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul e faça as marcas de acordo com o modelo ● .

10. A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.

11. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.

12. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

13. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

14. Duração da prova: 4 horas.

Nome: ______________________________

Identidade: ________________ Órgão Expedidor: ________________

Assinatura: ______________________________

01. Comumente, utilizamos o sistema de numeração decimal ou na base 10 que nos permite representar qualquer número utilizando os dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9. Por exemplo, quando escrevemos o número $1374 = (1374)_{10}$, significa que

$$1374 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 = (1374)_{10}.$$

No entanto, podemos representar números em outras bases. Por exemplo, a base 2, ou sistema binário é bastante utilizada na linguagem computacional. Nesta utilizamos apenas os algarismos 0 e 1 para representar qualquer número. Por exemplo, o número $11 = (11)_{10}$ pode ser representado na base 2 por $(1011)_2$, pois:

$$11 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (1011)_2.$$

Outro exemplo seria considerarmos a base 5. Nesta, o número $163 = (163)_{10}$ é representado na base 5 por $(1123)_5$, pois:

$$163 = 1 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = (1123)_5.$$

Analise as afirmações a seguir e marque (V) se a afirmação for verdadeira e (F) se a afirmação for falsa.

A – (V) (F) $(100)_2 + (100)_5 = (200)_{10}$

B – (V) (F) $(1)_2 + (3)_5 + (5)_{10} = (9)_{10}$

C – (V) (F) $26 = (26)_{10}$ é representado na base 3 por $(222)_3$

D – (V) (F) O número $2 = (2)_{10}$ possui a mesma representação nas bases 2 e 5.

E – (V) (F) Não existe um número que seja representado pelo mesmo algarismo nas bases $2, 5$ e 10.

RESPOSTAS DA QUESTÃO 01: F V V F F.

RESOLUÇÃO:

A – (F) Afirmação falsa. Observe que $(100)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (8)_{10}$ e $(100)_5 = 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0 = (25)_{10}$, logo $(100)_2 + (100)_5 \neq (200)_{10}$.

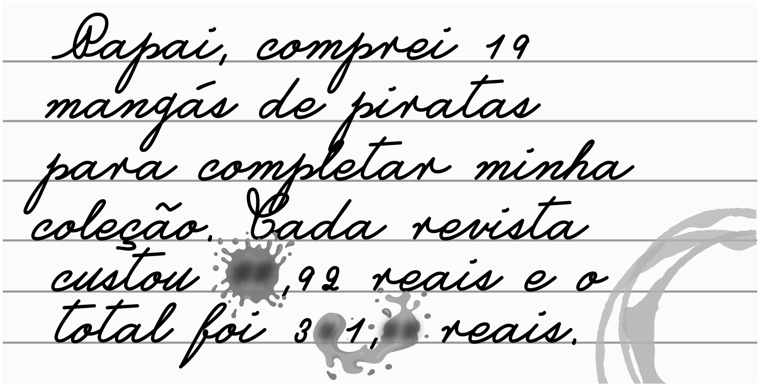
B – (V) Afirmação verdadeira. Observe que $(1)_2 + (3)_5 + (5)_{10} = (1)_{10} + (3)_{10} + (5)_{10} = (9)_{10}$.

C – (V) Afirmação verdadeira. Para a base 3, temos $(222)_3 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^0 = 26$.

D – (F) Afirmação falsa. Note que $(2)_{10} = (10)_2$ e $(2)_{10} = (2)_5$.

E – (F) Afirmação falsa. Perceba que $(1)_2 = (1)_5 = (1)_{10}$.

02. Waldecy havia deixado um bilhete para seu pai Edgar em cima da mesa. Edgar desatento derrubou um pouco de café no bilhete deixando-o levemente borrado conforme a figura abaixo:



Para tentar descobrir os algarismos borrados, Edgar os identificou com as letras do seu nome E, D, G, A e R, ficando a mensagem da seguinte forma:

"*Papai, comprei* 19 *mangás de piratas para completar minha coleção. Cada revista custou* $ED, 92$ *reais e o total foi* $3G1, AR$ *reais.*"

Com base na situação descrita acima, analise as afirmações a seguir, e marque (V) se a afirmação for verdadeira e (F) se a afirmação for falsa.

A – (V) (F) A soma dos algarismos borrados $E + D + G + A + R = 21$.

B – (V) (F) E é um quarto de A.

C – (V) (F) 8 mangás custariam R\$ $163, 36$.

D – (V) (F) $D \times G < A \times R$.

E – (V) (F) D divide $R \times A - G$.

RESPOSTAS DA QUESTÃO 02: V V F V V.

RESOLUÇÃO:

Observe que $ED, 92 \times 19$ termina em "$\cdots, 48$", portanto $A = 4$ e $R = 8$. Assim, o total fica $3G1, 48$. Note ainda que $3G1, 48$ dividido por 19 deve terminar exatamente "$\cdots, 92$", o que nos dá a única solução $G = 2$, pois:

Caso $G = 0$: Temos $301, 48/19$ é aproximadamente $15, 867$;
Caso $G = 1$: Temos $311, 48/19$ é aproximadamente $16, 394$;
Caso $G = 2$: Temos $321, 48/19$ dá exatamente $16, 92$;
Caso $G = 3$: Temos $331, 48/19$ é aproximadamente $17, 446$;
Caso $G = 4$: Temos $341, 48/19$ é aproximadamente $17, 973$;
Caso $G = 5$: Temos $351, 48/19$ é aproximadamente $18, 499$;
Caso $G = 6$: Temos $361, 48/19$ é aproximadamente $19, 025$;
Caso $G = 7$: Temos $371, 48/19$ é aproximadamente $19, 552$;
Caso $G = 8$: Temos $381, 48/19$ é aproximadamente $20, 078$;
Caso $G = 9$: Temos $391, 48/19$ é aproximadamente $20, 604$.

Assim, concluímos que $D = 6$ e $E = 1$. Desta forma,

A – (V) Afirmação verdadeira. A soma dos algarismos borrados é $E + D + G + A + R = 1 + 6 + 2 + 4 + 8 = 21$.

B – (V) Afirmação verdadeira. Pois $A = 4$ e $E = 1$.

C – (F) Afirmação falsa. Note que $8 \times 16, 92 = 135, 36$ reais.

D – (V) Afirmação verdadeira. Perceba que $D \times G = 6 \times 2 = 12$ e $A \times R = 4 \times 8 = 32$.

E – (V) Afirmação verdadeira. $R \times A - G = 8 \times 4 - 2 = 30$ que é divisível por $D = 6$.

03. Arthurzinho caminhando pela zona da mata pernambucana tropeçou em uma garrafa. Quando a abriu, uma ventania tomou conta do local e diante de si apareceu uma figura com vestimentas vermelhas e uma perna só.

“ Meu salvador, eu me chamo Saci Pererê .
Por livrar-me dessa prisão, irei te dar o meu chapéu mágico.
Ele triplicará toda quantia em reais que depositares em seu interior.
Porém, após cada feitiço, ele transportará 60 reais para mim he he he he!”

Não percebendo o riso malicioso do Saci, Arthurzinho, sem pensar, começou a utilizar o chapéu depositando todo o seu dinheiro sucessivamente três vezes. Ao fim da terceira utilização ele reclamou com o Saci: “Ora bolas, você me deu um chapéu com defeito! Ao invés de ganhar dinheiro, agora estou com apenas 3 reais!”

1. Quantos reais Arthurzinho possuía antes da primeira utilização?

O Saci falou: “He he he! Está bem! Vou te dar uma quantia que poderás utilizar o chapéu tantas vezes quanto quiseres! He he he!” Algumas utilizações depois, Arthurzinho falou para o Saci: “Juntei meus 3 reais com a quantia que você me deu e utilizei seu chapéu mais 47 vezes! E todas as vezes que o utilizei, fiquei sempre com a mesma quantia!”

2. Quantos reais o Saci deu para Arthurzinho?
3. Após os 50 feitiços, com quantos reais o Saci ficou?
4. Ao final dos mesmos 50 feitiços, Arthurzinho teve lucro ou prejuízo? De quanto?

RESOLUÇÃO:

1. Seja x a quantia em reais que Arthurzinho possuía antes da primeira utilização. Ao fim da primeira utilização ele fica com $3x - 60$ reais, ao fim da segunda com $9x - 240$ reais e ao fim da terceira com $27x - 780$ reais. Como essa última quantia deve ser igual a 3 reais, temos
$$27x - 780 = 3,$$
o que nos dá $x = 29$ reais.
2. Sendo y a quantia que o saci deu para Arthurzinho, então ele colocou no chapéu $y + 3$ reais. Como sabemos que ele sempre fica com a mesma quantia cada vez que usa o chapéu então basta calcular essa quantidade na primeira vez. Dessa forma, devemos ter
$$3(y + 3) - 60 = y + 3,$$
o que nos dá $y = 27$ reais.
3. Após os 50 feitiços o Saci ficou com um total de $50 \times 60 - 27 = 2973$ reais.
4. Pelo item 2. concluímos que ao final dos 50 feitiços ele ficou com $27 + 3 = 30$ reais. Pelo item 1. ele possuía 29 reais antes da primeira utilização. Assim, ele teve um lucro de 30 - 29 = 1 real.

04. Letícia deseja criar uma lista com 1010 números da seguinte maneira:

- O primeiro deles será 9;
- Cada número seguinte será obtido adicionando um dos números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ou 9 ao anterior;
- Nenhum dos números da lista terminará em 0.

Qual será o menor valor que o último número da lista poderá ter?

RESOLUÇÃO:

Uma vez que Letícia pretende obter o menor valor para o último número da lista, a cada número já listado ela deve adicionar o menor valor possível, dentre $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ou 9, para se obter o número posterior.

Como não podemos ter números na lista terminados em 0 e sendo 9 o primeiro número da lista, para se obter o segundo número devemos adicionar 2 ao 9. Logo, o segundo número listado é 11. Seguindo esse raciocínio, os próximos 8 números da lista são obtidos somando 1 ao número anterior. Concluímos que os dez primeiros números da lista são

$$9, 9+2=11, 11+1=12, 12+1=13, 13+1=14, 14+1=15, 15+1=16, 16+1=17, 17+1=18, 18+1=19.$$

Como o décimo número da lista é 19, devemos somar 2 a 19 e o décimo primeiro número da lista é 21. Novamente podemos obter os próximos 8 números da lista somando 1 ao número anterior,

$$19+2=21, 21+1=22, 22+1=23, 23+1=24, 24+1=25, 25+1=26, 26+1=27, 27+1=28, 28+1=29.$$

Para se obter os próximos 9 números da lista, o processo é análogo ao que foi descrito acima: soma-se 2 ao décimo nono e obtém-se o vigésimo, e os próximos 8 números da lista são obtidos somando 1 ao anterior. Cada vez que repetirmos esse processo obteremos os próximos 9 números da lista.

Assim, podemos dispor os números da lista em linhas sendo a primeira com um único número, 9, e cada linha seguinte com 9 números, conforme esquema abaixo

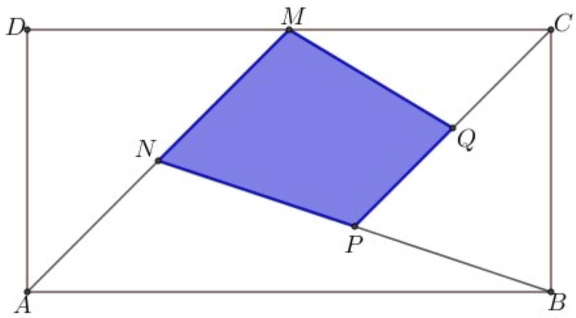
$$\begin{array}{r} 9 \\ 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 \\ 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 \\ 31, 32, 13, 34, 35, 36, 37, 38, 39 \\ \cdots \end{array}$$

Como o total de números da lista de Letícia é 1010 e $1010 = 112 \cdot 9 + 2$, então esta lista terá 112 linha com 9 números e duas linhas com um único número cada, a primeira com o número 9 e a última com o número que queremos descobrir.

Perceba que último número da lista ocupará a primeira posição da 114ª linha. Note também que os primeiros números de cada linha a partir da segunda são sempre 10 unidades maiores do que o primeiro número da linha anterior. Assim, o 1010º número da lista será $11 + 112 \cdot 10 = 1131$.

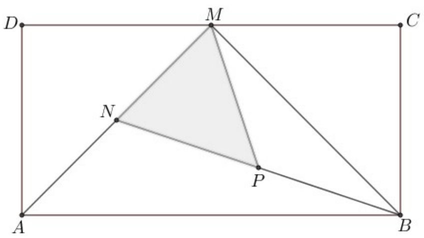
Outra forma é perceber que o último número de cada linha é sempre 10 unidades maior do que último número da linha anterior. Assim, o último número da 113ª linha é $112 \cdot 10 + 9 = 1129$ que é o 1009º número da lista de Letícia. Portanto o 1010º número da lista será $1129 + 2 = 1131$.

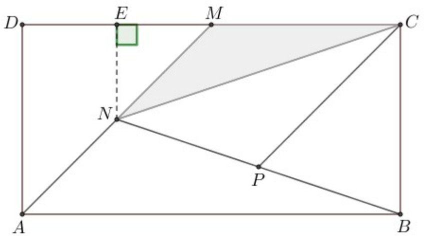
05. No retângulo $ABCD$ abaixo, M, N, P e Q são pontos médios, respectivamente de CD, AM, BN e PC. Qual é a razão entre a medida da área do quadrilátero $MNPQ$ com a medida da área do retângulo $ABCD$.

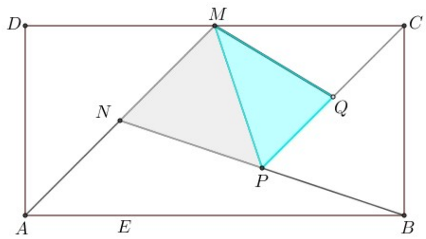


RESOLUÇÃO:

Etapa 1. Denotaremos por $[ABC]$ e $[ABCD]$ a medida das áreas do triângulo ABC e do quadrilátero $ABCD$, respectivamente. Para facilitar o entendimento, considere as seguintes figuras.







Usando a figura da esquerda, temos que os triângulos ΔABN e ΔNBM possuem a mesma área, pois $\overline{AN}$ e $\overline{NM}$ possuem a mesma medida, e as alturas relativas aos lados $\overline{MN}$ e $\overline{AM}$ são as mesmas.

Além disso, observe que os triângulos ΔAMD e ΔBMC são congruentes. Podemos concluir então que:

$$[AMD] = [ABN] = [BCM] = [NMB] = \frac{1}{4}[ABCD].$$

Etapa 2. Analogamente, como $\overline{NP}$ e $\overline{BP}$ têm a mesma medida e o os triângulo ΔNPM e ΔPBM possuem a mesma altura relativas às bases $\overline{NP}$ e $\overline{BP}$ respectivamente, então

$$[NPM] = [PBM] = \frac{1}{8}[ABCD].$$

Etapa 3. Agora usando a figura do meio acima, a semelhança dos triângulos ΔADM e ΔNEM, nos dá

$$[NCM] = \frac{1}{2}(NE \cdot MC) = \frac{1}{2}\left(\frac{AD}{2} \cdot \frac{CD}{2}\right) = \frac{1}{8}[ABCD].$$

Etapa 4. Ainda, como as medidas de $\overline{NP}$ e $\overline{PB}$ são iguais e a altura dos triângulos ΔNPC e ΔPBC, em relação às bases $\overline{NP}$ e $\overline{PB}$, respectivamente, é a mesma, segue que $[NPC] = [PBC]$. Logo, como $[NBCM] = \frac{1}{2}[ABCD]$, obtemos

$$[NPC] = [PBC] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)[ABCD] = \frac{3}{16}[ABCD] \;\text{ e }\; [NPCM] = \frac{5}{16}[ABCD].$$

Etapa 5. Finalmente, usando a figura da direita, temos, pela primeira parte, que $[NPM] = \frac{1}{8}[ABCD]$. Como $[PQM] = [QCM]$ e usando que $[NPCM] = \frac{5}{7}16[ABCD]$, obtemos

$$[PQM] = [QCM] = \frac{1}{2}([NPCM] - [NPM]) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{16} - \frac{1}{8}\right)[ABCD] = \frac{3}{32}[ABCD].$$

Etapa 6. Portanto,

$$[NPQM] = [NPM] + [PQM] = \frac{1}{8}[ABCD] + \frac{3}{32}[ABCD] = \frac{7}{32}[ABCD],$$

donde,

$$\frac{[NPQM]}{[ABCD]} = \frac{7}{32}.$$