Olimpíada Pernambucana de Matemática 2017

NÍVEL 2

Caderno de Questões Com Resoluções

OPEMAT

LEIA COM ATENÇÃO

01. Só abra este caderno após ler todas as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. Não destaque as folhas desse caderno.

04. A primeira questão é de proposições múltiplas; apresenta 5(cinco) alternativas para você decidir e marcar na coluna apropriada quais são verdadeiras e quais são falsas. As alternativas podem ser todas verdadeiras, todas falsas ou algumas verdadeiras e outras falsas. Na folha de respostas, as verdadeiras devem ser marcadas na coluna V; as falsas, na coluna F.

05. A segunda e a terceira questões são numéricas, tem respostas cujos valores variam de 00 a 99 que devem ser marcados, na folha de respostas, no local correspondente ao número da questão. (Coluna d para as dezenas e coluna u para as unidades. Respostas com valores entre 0 e 9 devem ser marcadas antepondo-se zero (0) ao valor, na coluna d).

06. As 3(três) últimas questões são discursivas e devem ser resolvidas, no caderno de prova, e na página onde estão enunciadas.

07. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

08. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

09. Assinale as respostas de cada uma das 3(três) primeiras questões no corpo da prova e, só depois, transfira os resultados para a folha de respostas.

10. Para marcar a folha de respostas, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul e faça as marcas de acordo com o modelo ●.

11. A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.

12. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.

13. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

14. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

15. Duração da prova: 4 horas.

NOME: ____

IDENTIDADE: ____________________ ÓRGÃO EXPEDIDOR: ____________________

ASSINATURA: ____

01. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas:

A– (V) (F) $59^{20} - 1$ não é divisível por 11.

B– (V) (F) O dígito das unidades de 2467^{101} é 1.

C– (V) (F) O número 245678945343444446 é quadrado perfeito.

D– (V) (F) Os números naturais m, n e k são tais que $21m = 28n = 12k$. Então, $m.n.k$ é múltiplo de 84.

E– (V) (F) 999919 é primo.

RESPOSTAS DA QUESTÃO 01: F F V V F.

RESOLUÇÃO:

A- Falsa. Nesse item vamos utilizar o Lema dos Restos, cujo enunciado é o seguinte: Sejam A e B números inteiros e N um número natural. Se A deixa resto R_1 na divisão por N e B deixa resto R_2 na divisão por N então $A.B$ deixa o mesmo resto que $R_1.R_2$ na divisão por N.

Note que 59 deixa resto 4 na divisão por 11. Assim, pelo Lema dos Restos, 59^2 deixa o mesmo resto que 4.4=16 na divisão por 11. Logo 59^2 deixa resto 5 na divisão por 11.

$59^3 = 59^2.59$ deixa o mesmo resto que 5.4 na divisão por 11. Daí 59^3 deixa resto 9 na divisão por 11.

$59^5 = 59^3.59^2$ deixa o mesmo resto que $9.5 = 45$ na divisão por 11. Consequentemente, 59^5 deixa resto 1 na divisão por 11.

Desse modo, $59^{20} = (59^5)^4$ deixa resto 1 na divisão por 11. Sendo q o quociente da divisão euclidiana de 59^{20} por 11, então

$$59^{20} = 11q + 1.$$

Assim $59^{20} - 1 = 11q + 1 - 1 = 11q$, portanto, $59^{20} - 1$ é divisivel por 11.

B- Falsa. Para este item também utilizaremos o Lema dos Restos:

Note que o dígito as unidades de um número é o seu resto na divisão por 10.

Assim, o dígito das unidades de 2467^2 é 9, o que implica que o dígito das unidades de 2467^4 é 1. Note que, o dígito das unidades de $2467^{100} = (2467^4)^{25}$ também é 1.

Por fim, veja que o dígito das unidades de $2467^{101} = 2467^{100}.2467$ é 7. Logo esta alternativa é falsa.

C- Verdadeira. Se $A = 245678945343444446$ é quadrado perfeito então existe um número natural n tal que $245678945343444446 = n^2$. Pelo critério de divisibilidade por 4, vemos que A deixa resto 2 na divisão por 4. Agora, vamos analisar os possíveis restos de n^2 na divisão por 4. Temos que n deixa resto 0, 1, 2 ou 3 na divisão por 4:

- Se n deixa resto 0 na divisão por 4 então $n = 4q \Rightarrow n^2 = 16q^2 = 4(4q^2)$. Assim n^2 é múltiplo de 4 e este caso não é possível pois sabemos que $n^2 = A$ e que A deixa resto 2 na divisão por 4.
- Se n deixa resto 1 na divisão por 4 então $n = 4q + 1 \Rightarrow n^2 = 16q^2 + 8q + 1 = 4(4q^2 + 2q) + 1$. Assim n^2 deixa resto 1 na divisão por 4 e este caso não é possível pois sabemos que $n^2 = A$ e que A deixa resto 2 na divisão por 4.
- Se n deixa resto 2 na divisão por 4 então $n = 4q + 2 \Rightarrow n^2 = 16q^2 + 16q + 4 = 4(4q^2 + 4q + 1)$. Assim n^2 é multiplo de 4 e este caso não é possível,
- Se n deixa resto 3 na divisão por 4 então $n = 4q + 3 \Rightarrow n^2 = 16q^2 + 24q + 9 = 4(4q^2 + 4q + 2) + 1$. Assim n^2 deixa resto 1 na divisão por 4 e este caso também não é possível,

Desse modo, concluímos que $A = 245678945343444446$ não é quadrado perfeito.

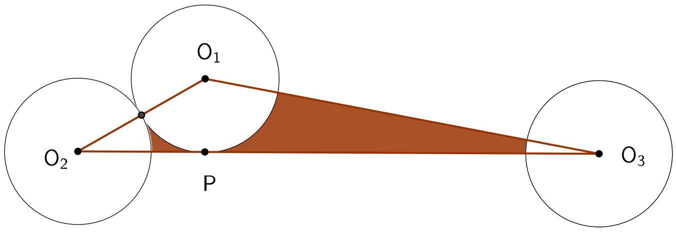
D - Verdadeira. Temos que m, n, k satisfazem 3 equações. Podemos escrever a equação $21m = 28n$ como $3.7.m = 4.7n$. Logo $3m = 4n$. Como $\mathrm{mdc}(3, 4) = 1$, obtemos que $3|n$ e $4|m$. Logo, $n = 3a$, $m = 4b$.

Da equação $21m = 12k$ obtemos que $7m = 4k$ o que nos dá $7|k$, o que no dá $k = 7c$.

Desse modo, concluímos que $n.m.k = (3a)(4b)(7c) = 84abc$.

E - Falsa. Temos que $999919 = 100^2 - 9^2 = (100 + 9)(100 - 9) = 109.91$. Assim 999919 não é primo.

02. **(ANULADA)** Na figura a seguir, temos três circulos identicos de raio r e centros O_1 O_2 e O_3, tais que O_2O_3 tangencia o círculo de centro O_1 no ponto P. Determine a medida do segmento O_2O_3, (essa medida é igual ao comprimento de um dos círculos) sabendo que a área sombreada mede metade da área do triângulo $O_1O_2O_3$, e indique o inteiro mais próximo dessa medida.



RESPOSTA: 31.

Observação: Essa questão será anulada pois foi aplicada com enunciado incorreto e, conforme o regulamento, os pontos a ela correspondentes serão distribuídos entre as demais questões.

ENUNCIADO CORRETO

Na figura a seguir, temos três circulos identicos de raio $r = 5$ e centros O_1, O_2 e O_3, tais que a reta O_2O_3 tangencia o círculo de centro O_1 no ponto P. Determine a parte intera medida do segmento O_2O_3, sabendo que a área sombreada mede metade da área do triângulo. $O_1O_2O_3$

RESOLUÇÃO:

Note que os ângulos internos do triângulo são os ângulos correspondentes aos setores circular internos aos triângulos. Sendo a soma desses ângulos igual a 180º, a soma das áreas dos setores correspondem a metade da área de um dos círculos e, pela hipótese, vale metade da área do triângulo. Ou seja, se $O_2O_3 = x$, então

$$\frac{\pi r^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{x.r}{2} \Rightarrow x = 2\pi.r$$

Fazendo $r = 5$ e $\pi = 3,14$ obtemos $x = 31,4$. Resposta 31.

03. Você já percebeu que os dados que são vendidos são cubos com os números de 1 até 6 em suas faces e que a soma dos números nas faces opostas é sempre 7? Se uma empresa decide construir dados sem essa restrição da soma das faces opostas ser constante, quantos dados poderiam ser construídos?

RESPOSTA: 30.

RESOLUÇÃO:

Note que segurando o dado com qualquer face no chão temos 4 formas de girá-lo mantendo essa face no chão. Como temos 6 faces ha 24 formas de girar o dado. Para colocar 6 números na face do dado há no total $6.5.4.3.2.1 = 720$ formas, mas cada forma distinta e contada 24 vezes pois ha 24 formas de girar, dai, temos apenas $720/24 = 30$ dados distintos.

04. O quadrado mágico é um jogo de completar as "casas" de uma tabela, com números, de modo que a soma dos números nas linhas, colunas e das diagonais sejam sempre iguais. Iremos completar o quadrado de tamanho 3, ou seja, 9 casas serão preenchidas com os números distintos de 1 a 9. Por exemplo:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

a) É possível completar os quadrados abaixo?

	5	
2		

	5	2

		2
	5	

b) Prove que qualquer preenchimento do quadrado mágico deve ter sempre o número 5 no seu centro.
c) Descrever todas as soluções possíveis.

RESOLUÇÃO:

a) É possível completar o primeiro e o terceiro quadrado da seguinte maneira:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

O quadrado do meio não pode ser completado. De fato, 9+5+1=15=9+4+2 são as únicas maneiras de escrever 15 como soma de três números de 1 à 9 com um deles sendo 9. Daí o segundo quadrado deve ter 9 e 4 preenchendo a terceira coluna do quadrado e temos 2 maneiras de fazer isso:

		9
	5	2
		4

ou

		4
	5	2
		9

Continuando o processo temos:

6		9
	5	2
1		4

ou

1		4
	5	2
6		9

O quadrado não pode ser completado, pois temos uma linha com 6 e 9, forçando o terceiro número ser 0.

b) Verifiquemos que a soma dos números postos em cada linha, coluna ou diagonal devem ser iguais a 15. Ponhamos as letras $a, b, c, d, x, e, f, g, h$ para representar os números na tabela:

a	b	c
d	x	e
f	g	h

$$a + b + c + d + x + e + f + g + h = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{(9+1).9}{2} = 45$$

Como a soma nas linhas são iguais, podemos separar no primeiro membro das igualdades os elementos das linhas de modo que concluimos que:

$$a + b + c = d + x + e = f + g + h = 15(linhas)$$

E como as somas nas colunas e nas diagonais também devem ser iguais, concluímos que:

$$a + d + f = b + x + g = c + e + h = 15(colunas)$$

$$a + x + h = c + x + f = 15(diagonais)$$

Agora, somando todas as linhas, colunas e diagonais que contém x, teremos $4.15 = 60$. Nesta conta estamos contando o x 4 vezes e todas as outras casas apenas 1 vez. Assim,

$$1 + 2 + ... + 7 + 8 + 9 + 3x = 60 \therefore 45 + 3x = 60 \therefore 3x = 15 \therefore x = 5.$$

c) Pelo item a) o 9 só pode estar na coluna ou linha central e acompanhado de 2 e 4 e 5 e 1. Isso nos dá as seguintes possibilidades:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & 9 & \\ \hline & 5 & \\ \hline & 1 & \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 9 & 4 \\ \hline 7 & 5 & 3 \\ \hline 6 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$\searrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 9 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 8 & 1 & 6 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline & 5 & \\ \hline & 9 & \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & 1 & 8 \\ \hline 7 & 5 & 3 \\ \hline 2 & 9 & 4 \\ \hline\end{array}$$

$$\searrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 8 & 1 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 4 & 9 & 2 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline 9 & 5 & 1 \\ \hline & & \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 7 & 6 \\ \hline 9 & 5 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 8 \\ \hline\end{array}$$

$$\searrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 3 & 8 \\ \hline 9 & 5 & 1 \\ \hline 2 & 7 & 6 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline 1 & 5 & 9 \\ \hline & & \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & 7 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 9 \\ \hline 8 & 3 & 4 \\ \hline\end{array}$$

$$\searrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 8 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 5 & 9 \\ \hline 6 & 7 & 2 \\ \hline\end{array}$$

05. Encontre todos os pares de números naturais (m, n) que são soluções da equação

$$5^m + 231 = 4^n.$$

RESOLUÇÃO:

Note que o primeiro membro da equação deixa resto 1 na divisão por 5. Isso nos diz que n deve ser par. Assim $n = 2k$. Logo, $5^m + 231 = 16^k$. Como o segundo membro desta última equação é múltiplo de 8 devemos ter que 5^m deixa resto 1 na divisão por 8, e daí temos que m é par. Assim $m = 2l$. Desse modo, a nossa equação toma a seguinte forma:

$$5^{2l} + 231 = 4^{2k}.$$

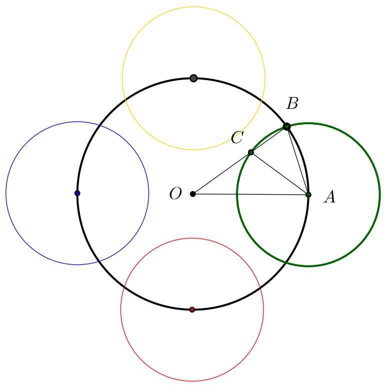
Podemos manipular a nossa equação da seguinte maneira:

$$231 = 4^{2k} - 5^{2l} = (4^k + 5^l)(4^k - 5^l).$$

Uma vez que $231 = 3.5.7$, temos os seguintes casos a considerar:

- $4^k + 5^l = 1$: É possível verificar diretamente que esse caso não possui solução.
- $4^k + 5^l = 3$: É possível verificar diretamente que esse caso não possui solução.
- $4^k + 5^l = 7$: É possível verificar diretamente que esse caso não possui solução.
- $4^k + 5^l = 11$: É possível verificar diretamente que esse caso não possui solução.
- $4^k + 5^l = 21$: É possível verificar diretamente que $k = 2$ e $l = 1$ é a única solução.
- $4^k + 5^l = 33$: É possível verificar diretamente que esse caso não possui solução.
- $4^k + 5^l = 77$: É possível verificar diretamente que esse caso não possui solução.
- $4^k + 5^l = 231$: É possível verificar diretamente que esse caso não possui solução.

06. Na tentativa de montar o símbolo da OPEMAT, um designer gráfco desenhou 4 círculos de raios iguais a r, cujos centros estão igualmente espaçados na circunferência maior de centro O raio R. Percebeu-se que, se B é um dos pontos de interseção de um das circunferências menores de centro A com a circunferência de centro O, então OB corta essa circunferência menor em um ponto C tal que AC é bissetriz do ângulo $\angle OAB$. Determine o valor de r em função de R.

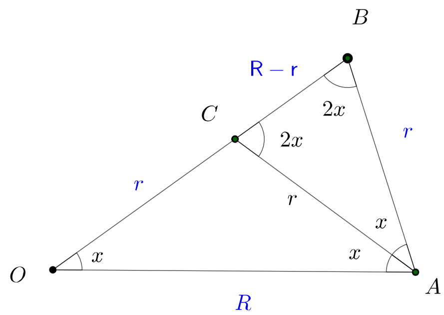


RESOLUÇÃO:

Seja $x = \angle OAC = \angle CAB$. Sabendo que $OA = OB = R$, o triângulo OAB é isosceles.

Logo $\angle OBA = \angle OAB = 2x$.

Por outro lado, ABC também é isósceles. Sendo assim, $\angle ACB = \angle ABC = 2x$. Por conseguinte, $\angle AOC = \angle ACB - \angle OAC = 2x - x = x$. Desta forma, AOC é isósceles com $AC = OC = r$.



Observe que os triângulos OAB e ABC são semelhantes pelo critério "ângulo-ângulo (AA)".

Então

$$\frac{r}{R-r} = \frac{R}{r} \implies r^2 + Rr - R^2 = 0 \implies r = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} \therefore$$

$$r = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) R.$$