Olimpíada Pernambucana de Matemática 2019

# NÍVEL 3

## Caderno de Questões

OPEMAT

## LEIA COM ATENÇÃO

**01.** Só abra este caderno após ler todas as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

**02.** Preencha os dados pessoais.

**03.** Não destaque as folhas desse caderno.

**04.** A primeira e a segunda questões são de proposições múltiplas; cada uma delas apresenta 5(cinco) alternativas para você decidir e marcar na coluna apropriada quais são verdadeiras e quais são falsas. As alternativas podem ser todas verdadeiras, todas falsas ou algumas verdadeiras e outras falsas. Na folha de respostas, as verdadeiras devem ser marcadas na coluna V; as falsas, na coluna F.

**05.** As 3(três) últimas questões são discursivas e devem ser resolvidas, no Caderno de Questões, e na página onde estão enunciadas.

**06.** Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

**07.** Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

**08.** Assinale as respostas de cada uma das 2(duas) primeiras questões no corpo da prova e, só depois, transfira os resultados para a folha de respostas.

**09.** Para marcar a folha de respostas, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul e faça as marcas de acordo com o modelo ● .

**10.** A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.

**11.** Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.

**12.** Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

**13.** Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

**14.** Duração da prova: 4 horas.

Nome: ______________________________

Identidade: ______________ Órgão Expedidor: ______________

Assinatura: ______________________________

**01.** No programa “Os Irracionais”, da emissora de rádio FM 3.14, alguns pares de números foram sorteados para irem juntos assistir a grande final da Olimpíada de Matemática da terra do $\pi$-raia. Sabendo que os números 0 e $-\dfrac{5}{2}$ não participaram do sorteio e que os pares de números racionais sorteados $(A; B)$ satisfazem a seguinte identidade:

$$\frac{4B^2 + B}{2A^2 + 5A} = 2.$$

Verifique as afirmações a seguir atribuindo (V) se a afirmação for verdadeira e (F) se a afirmação for falsa.

**A** – (V) (F) $\left(-\dfrac{15}{2}; -\dfrac{25}{4}\right)$ pode ter sido um par de números racionais sorteado.

**B** – (V) (F) $A = -\dfrac{15}{2}$ não pode ter sido sorteado junto com um número natural $B$.

**C** – (V) (F) Se o par $(A; B)$ é sorteado, então $A$ e $B$ não podem ser números inteiros simultaneamente.

**D** – (V) (F) Se o par $(A; B)$ é sorteado e $A$ e $B$ são ambos números inteiros, então, obrigatoriamente, são positivos.

**E** – (V) (F) Apenas dois pares de números inteiros podem ter sido sorteados.

ESPAÇO PARA RASCUNHO:

PÁGINA PARA RASCUNHO:

**02.** Cinco amigos, Edgar, Gilson, Lorena, Marcelo e Tanaka decidem tomar sorvete. Ao chegar na sorveteria, descobrem que são oferecidos apenas 6 sabores: baunilha, chocolate, doce de leite, flocos, morango e paçoca.

Verifique as afirmações a seguir atribuindo (V) se a afirmação for verdadeira e (F) se a afirmação for falsa.

**A** – (V) (F) Sabendo que Edgar gosta de todos os sabores, o número de maneiras para Edgar escolher um sorvete com 3 bolas é 20.

**B** – (V) (F) Considerando que Gilson deseja escolher pelo menos uma bola de chocolate, o número de maneiras para Gilson escolher um sorvete com 5 bolas é 189.

**C** – (V) (F) Lorena está decidindo entre comprar um sorvete com 1 bola, 2 bolas, 3 bolas ou 4 bolas. O número de maneiras para Lorena tomar esta decisão é 209.

**D** – (V) (F) Marcelo deseja escolher um sorvete de 4 bolas de modo que haja mais bolas de paçoca do que de doce de leite. O número de maneiras que ele pode escolher este sorvete é 80.

**E** – (V) (F) Tanaka deseja escolher um sorvete de 5 bolas sendo, no máximo, duas delas de flocos. O número de maneiras de ele fazer essa escolha é 231.

ESPAÇO PARA RASCUNHO:

PÁGINA PARA RASCUNHO:

**03.** O $\pi - raia$ convidou dois grupos de amigos $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ e $\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$, todos números reais positivos, para uma tarde de jogo com desigualdades.

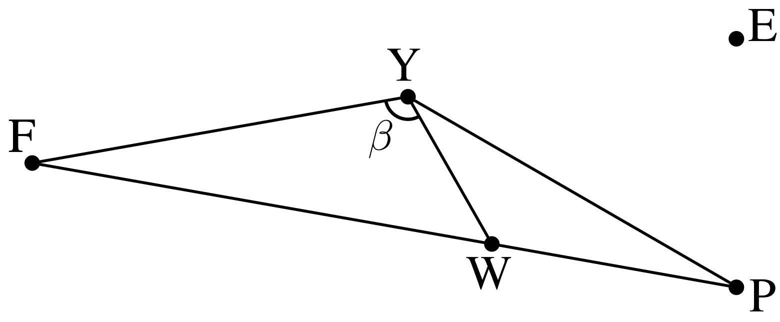
1. Os grupos quando estão juntos ficam "mais fortes" do que misturados. Mostre que essa "força" satisfaz a seguinte desigualdade:
$$\left(\sum_{i=1}^{3} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right)^2.$$
**Sugestão:** Defina a função
$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) =\ & \sum_{i=1}^{3} (a_i \cdot x - b_i)^2. \end{aligned}$$

2. Sabendo que o $\pi - raia$ e seus amigos satisfazem a relação
$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1 \quad \text{e} \quad b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = \pi^3.$$
Mostre, usando a "força" do item 1, a validade da seguinte desigualdade:
$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{a_1^2} + \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{a_2^2} + \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{a_3^2} \geq 9 \cdot \pi^2.$$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO **03:**

CONTINUAÇÃO DA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO **03:**

**04.** Dois feixes de luz são lançados do ponto $F$ na figura abaixo em direção aos pontos $E$ e $P$ que estão a mesma distância do ponto $F$ . No caminho do feixe que sai de $F$ na direção de $E$, é colocado um espelho num ponto Y para desviar o feixe em direção ao ponto $W$ no feixe $FP$. Porém, o feixe refletiu em direção ao ponto $P$. Sabe-se que o ângulo $F\hat{Y}P$ mede $140°$, que a medida do segmento $EP$ é igual a medida do segmento $WP$, que o triângulo $\Delta FYP$ é isósceles e que ao rotacionar um pouco o espelho mantendo o ponto $Y$ fixo conseguiu-se um feixe incidente em $W$. Sendo $\beta$ o ângulo entre o feixe incidente em $Y$ e o feixe refletido que passa por $W$, determine $\beta$.




ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO **04:**

CONTINUAÇÃO DA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO **04:**

**05.** Um par de números inteiros $(a, b)$ é chamado de *acidental* quando ambas as razões abaixo

$$\frac{a^2 - b + a}{ab - a - 1} \quad \text{e} \quad \frac{b^2 - a + b}{ab - b - 1},$$

são números naturais. Encontre todos os pares de inteiros acidentais com $a > 1$ e $b > 1$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO **05:**

CONTINUAÇÃO DA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO **05:**

PÁGINA EXTRA PARA CONTINUAÇÃO DA RESOLUÇÃO DE ALGUMA QUESTÃO: