



Olimpíada Pernambucana de Matemática 2019

NÍVEL 2

Caderno de Questões com Resoluções



LEIA COM ATENÇÃO

01. Só abra este caderno após ler todas as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.
02. Preencha os dados pessoais.
03. Não destaque as folhas desse caderno.
04. A primeira e a segunda questões são de proposições múltiplas; cada uma delas apresenta 5(cinco) alternativas para você decidir e marcar na coluna apropriada quais são verdadeiras e quais são falsas. As alternativas podem ser todas verdadeiras, todas falsas ou algumas verdadeiras e outras falsas. Na folha de respostas, as verdadeiras devem ser marcadas na coluna V; as falsas, na coluna F.
05. As 3(três) últimas questões são discursivas e devem ser resolvidas, no Caderno de Questões, e na página onde estão enunciadas.
06. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.
07. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.
08. Assinale as respostas de cada uma das 2(duas) primeiras questões no corpo da prova e, só depois, transfira os resultados para a folha de respostas.
09. Para marcar a folha de respostas, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul e faça as marcas de acordo com o modelo ● .
10. A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.
11. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.
12. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.
13. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.
14. Duração da prova: 4 horas.

NOME: _____

IDENTIDADE: _____ ÓRGÃO EXPEDIDOR: _____

ASSINATURA: _____

- 01.** Na terra de π -raia, a moeda utilizada é o “ π -real” ($\pi\mathbb{R}$). Lá, as notas de “ π -reais” utilizadas são compostas por valores representados por números primos menores do que 100.



Julgue as afirmações a seguir atribuindo (V) se a afirmação for verdadeira e (F) se a afirmação for falsa.

- A** – (V) (F) A nota de 91 π -reais não existe na terra do π -raia.
B – (V) (F) Nesse mundo, existem notas de 97 π -reais.
C – (V) (F) Há exatamente 19 notas diferentes.
D – (V) (F) É possível passar um troco de 100 π -reais utilizando apenas notas de 11 e 13.
E – (V) (F) Conseguimos passar o troco de 11 π -reais de seis maneiras diferentes.

RESPOSTAS DA QUESTÃO 01: V V F V V.

RESOLUÇÃO:

- A** – (V) Afirmação verdadeira. Uma vez que $91 = 7 \cdot 13$, então 91 não é um número primo. Portanto, não existem notas de 91 π -reais.
B – (V) Afirmação verdadeira. 97 é o maior número primo menor do que 100. Para verificar que ele é primo, observe que 97 não é divisível pelos primos menores do que $\sqrt{97}$, a saber, 2, 3, 5 e 7.
C – (F) Afirmação falsa. Utilizando o crivo de Eratóstenes, podemos verificar que os valores para as notas são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97, totalizando 25 notas diferentes.
D – (V) Afirmação verdadeira. Perceba que $100 = 2 \cdot 11 + 6 \cdot 13$, portanto podemos passar o troco usando duas notas de 11 e 6 notas de 13.
E – (V) Afirmação verdadeira. Note que temos seis maneiras de passar o troco:

$$\begin{aligned} 11 &= 2 + 2 + 2 + 2 + 3 \\ &= 2 + 2 + 2 + 5 \\ &= 2 + 2 + 7 \\ &= 2 + 3 + 3 + 3 \\ &= 3 + 3 + 5 \\ &= 11. \end{aligned}$$

- 02.** No programa “Os Irracionais”, da emissora de rádio FM 3.14, alguns pares de números foram sorteados para irem juntos assistir a grande final da Olimpíada de Matemática da terra do π -raia. Sabendo que os números 0 e $-\frac{5}{2}$ não participaram do sorteio e que os pares de números racionais sorteados $(A; B)$ satisfazem a seguinte identidade:

$$\frac{4B^2 + B}{2A^2 + 5A} = 2.$$

Verifique as afirmações a seguir atribuindo (V) se a afirmação for verdadeira e (F) se a afirmação for falsa.

A – (V) (F) $\left(-\frac{15}{2}; -\frac{25}{4}\right)$ pode ter sido um par de números racionais sorteado.

B – (V) (F) $A = -\frac{15}{2}$ não pode ter sido sorteado junto com um número natural B .

C – (V) (F) Se o par $(A; B)$ é sorteado, então A e B não podem ser números inteiros simultaneamente.

D – (V) (F) Se o par $(A; B)$ é sorteado e A e B são ambos números inteiros, então, obrigatoriamente, são positivos.

E – (V) (F) Apenas dois pares de números inteiros podem ter sido sorteados.

RESPOSTAS DA QUESTÃO 02: V F F F V.

RESOLUÇÃO:

A – (V) Afirmação verdadeira.

Fazendo $A = -\frac{15}{2}$ e $B = -\frac{25}{4}$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{4B^2 + B}{2A^2 + 5A} &= \frac{4 \cdot \left(-\frac{25}{4}\right)^2 + \left(-\frac{25}{4}\right)}{2 \cdot \left(-\frac{15}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{15}{2}\right)} = \frac{\frac{625}{4} + \left(-\frac{25}{4}\right)}{\frac{225}{2} - \frac{75}{2}} \\ &= \frac{\frac{600}{4}}{\frac{150}{2}} = \frac{150}{75} = 2. \end{aligned}$$

B – (F) Afirmação falsa.

Se $A = -\frac{15}{2}$ temos que

$$\frac{4B^2 + B}{2A^2 + 5A} = 2 \Leftrightarrow \frac{4B^2 + B}{75} = 2 \Leftrightarrow 4B^2 + B - 150 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau em B , obtemos

$$\Delta = (1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-150) = 1 + 2400 = 2401.$$

e

$$B = \frac{-1 \pm \sqrt{2401}}{2 \cdot 4} \Rightarrow B_1 = -\frac{25}{4} \text{ e } B_2 = 6.$$

Logo, $A = -\frac{15}{2}$ e $B = 6$ formam um par de números que pode ter sido sorteado.

C – (F) Afirmação falsa.

D – (V) Afirmação falsa.

E – (V) Afirmação verdadeira.

Responderemos os itens (C), (D) e (E) com o mesmo argumento.

Observe que

$$\begin{aligned}\frac{4B^2 + B}{2A^2 + 5A} = 2 &\Leftrightarrow 4B^2 + B = 4A^2 + 10A \Leftrightarrow 4B^2 + B + \frac{25}{4} = 4A^2 + 10A + \frac{25}{4} \Leftrightarrow \\ 4B^2 + B + \frac{1}{16} + \frac{99}{16} &= \left(2A + \frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(2A + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(2B + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{99}{16}.\end{aligned}$$

Daí usando o produto notável $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{4B^2 + B}{2A^2 + 5A} = 2 &\Leftrightarrow \left(2A + 2B + \frac{11}{4}\right) \cdot \left(2A - 2B + \frac{9}{4}\right) = \frac{99}{16} \Leftrightarrow \\ (8A + 8B + 11) \cdot (8A - 8B + 9) &= 99.\end{aligned}$$

Como estamos buscando A e B inteiros, temos que $(8A + 8B + 11) \cdot (8A - 8B + 9)$ é um produto de números inteiros. Além disso, temos as seguintes possibilidades para 99 ser escrito como produto de números inteiros:

- * $99 = 1 \cdot 99$
- * $99 = (-1) \cdot (-99)$
- * $99 = (3) \cdot (33)$
- * $99 = (-3) \cdot (-33)$
- * $99 = (9) \cdot (11)$
- * $99 = (-9) \cdot (-11)$

Se $99 = 1 \cdot 99$ temos

$$\begin{cases} 8A + 8B + 11 = 1 \\ 8A - 8B + 9 = 99 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 8A + 8B + 11 = 99 \\ 8A - 8B + 9 = 1 \end{cases}$$

Neste caso, temos como respectivas soluções $A = 5$ e $B = -25/4 \notin \mathbb{Z}$ ou $A = 5$ e $B = 6$. Portanto, (C) é Falso.

Se $99 = (-1) \cdot (-99)$ temos

$$\begin{cases} 8A + 8B + 11 = -1 \\ 8A - 8B + 9 = -99 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 8A + 8B + 11 = -99 \\ 8A - 8B + 9 = -1 \end{cases}$$

em ambos os casos $A = -15/2 < 0$.

Se $99 = 3 \cdot 33$ temos

$$\begin{cases} 8A + 8B + 11 = 3 \\ 8A - 8B + 9 = 33 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 8A + 8B + 11 = 33 \\ 8A - 8B + 9 = 3 \end{cases}$$

Neste caso temos como respectivas soluções $A = 1$ e $B = 7/4 \notin \mathbb{Z}$ ou $A = 1$ e $B = -2$. Assim, (D) é Falso.

Por fim, se $99 = (-3) \cdot (-33)$ temos

$$\begin{cases} 8A + 8B + 11 = -3 \\ 8A - 8B + 9 = -33 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 8A + 8B + 11 = -33 \\ 8A - 8B + 9 = -3 \end{cases}$$

em ambos os casos $A = -7/2 < 0$.

Se $99 = 9 \cdot 11$ temos

$$\begin{cases} 8A + 8B + 11 = 9 \\ 8A - 8B + 9 = 11 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 8A + 8B + 11 = 11 \\ 8A - 8B + 9 = 9 \end{cases}$$

em ambos os casos $A = 0$.

Se $99 = (-9) \cdot (-11)$ temos

$$\begin{cases} 8A + 8B + 11 = -9 \\ 8A - 8B + 9 = -11 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 8A + 8B + 11 = -11 \\ 8A - 8B + 9 = -9 \end{cases}$$

em ambos os casos $A = -5/2 < 0$.

Logo $A = 5$ e $B = 6$ ou $A = 1$ e $B = -2$ são as únicas soluções inteiras. Portanto, (E) é Verdadeiro.

Se $99 = (-1) \cdot (-99)$ temos

$$\begin{cases} 8A + 8B + 11 = -1 \\ 8A - 8B + 9 = -99 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 8A + 8B + 11 = -99 \\ 8A - 8B + 9 = -1 \end{cases}$$

em ambos os casos $A = -15/2 < 0$.

Se $99 = 3 \cdot 33$ temos

$$\begin{cases} 8A + 8B + 11 = 3 \\ 8A - 8B + 9 = 33 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 8A + 8B + 11 = 33 \\ 8A - 8B + 9 = 3 \end{cases}$$

Neste caso temos como respectivas soluções $A = 1$ e $B = -2$ ou $A = 1$ e $B = 7/4 \notin \mathbb{Z}$. Assim, (D) é Falso.

Por fim, se $99 = (-3) \cdot (-33)$ temos

$$\begin{cases} 8A + 8B + 11 = -3 \\ 8A - 8B + 9 = -33 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 8A + 8B + 11 = -33 \\ 8A - 8B + 9 = -3 \end{cases}$$

em ambos os casos $A = -7/2 < 0$.

Se $99 = 9 \cdot 11$ temos

$$\begin{cases} 8A + 8B + 11 = 9 \\ 8A - 8B + 9 = 11 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 8A + 8B + 11 = 11 \\ 8A - 8B + 9 = 9 \end{cases}$$

em ambos os casos $A = 0$.

Se $99 = (-9) \cdot (-11)$ temos

$$\begin{cases} 8A + 8B + 11 = -9 \\ 8A - 8B + 9 = -11 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 8A + 8B + 11 = -11 \\ 8A - 8B + 9 = -9 \end{cases}$$

em ambos os casos $A = -5/2 < 0$.

Logo $A = 5$ e $B = 6$ ou $A = 1$ e $B = -2$ são as únicas soluções inteiras. Portanto, (E) é Verdadeiro.

03. Na terra de π -raia, um observador registrou que um cometa X e um cometa Y poderiam ser vistos a cada período de 76 e y anos, respectivamente. Sabendo que este ano os dois cometas foram vistos juntos, e que a próxima vez que eles serão vistos juntos novamente ocorre daqui a 684 anos, responda os seguintes itens.

1. Quantas vezes os cometas serão vistos juntos durante os próximos 13.000 anos?
2. Determine todos os possíveis valores para y .

RESOLUÇÃO:

Dividiremos a resolução em três etapas:

1. Como os cometas se encontram a cada 684 anos, e foram vistos este ano, basta verificar a quantidade de vezes que 684 cabem em 13.000 e isso ocorre em um total de 19 vezes, pois $19 \cdot 684 = 12996$.
2. Perceba que $\text{mmc}(76, y) = 684$. Fatorando temos que $76 = 2^2 \cdot 19$ e $684 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 19$. Desta forma, como 684 é um múltiplo de y , então y é da forma $y = 2^j \cdot 3^2 \cdot 19^k$, em que $j = 0, 1, 2$ e $k = 0, 1$, temos assim os seguintes possíveis valores para y
 - (a) Se $j = 0$ e $k = 0$, $y = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 19^0 = 9$.
 - (b) Se $j = 0$ e $k = 1$, $y = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 19^1 = 171$.
 - (c) Se $j = 1$ e $k = 0$, $y = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 19^0 = 18$.
 - (d) Se $j = 1$ e $k = 1$, $y = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 19^1 = 342$.
 - (e) Se $j = 2$ e $k = 0$, $y = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 19^0 = 36$.
 - (f) Se $j = 2$ e $k = 1$, $y = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 19^1 = 684$.

04. Ao observar a sua sopa de letrinhas, Dafne percebe que é possível formar palavras com as letras que estão flutuando na sopa.



Admitindo que a sopa possui ao menos uma letra de cada letra do alfabeto e que as letrinhas aparecem em quantidade suficiente para formar as palavras pedidas, calcule:

1. O número de palavras com 3 letras, utilizando-se apenas as letras de A até E em que cada letra pode ser escolhida mais de uma vez e letras distintas devem estar ordenadas alfabeticamente
2. O número de palavras com 10 letras, utilizando-se apenas as letras de A até G e supondo que cada letra deva ser escolhida pelo menos uma vez.

1. Temos 3 casos a considerar: (i) as três letras da palavra são idênticas; (ii) a palavra têm duas letras idênticas e uma segunda letra distinta da primeira; (iii) a palavra possui três letras distintas. No caso (i), temos 5 possibilidades: AAA, BBB, CCC, DDD, EEE. No caso (ii), temos 5 possibilidades para escolher a primeira letra e 4 possibilidades para escolher a segunda letra. Logo, 20 possibilidades para escolher as duas letras que irão figurar na palavra. Entretanto, cada palavra escolhida assim foi contada duas vezes. Logo, devemos dividir por dois a nossa resposta, o que nos dá $5 \times 4/2 = 10$ modos. Por fim, escolhemos qual dessas duas letras irá se repetir, o que pode ser feito de 2 maneiras. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $10 \times 2 = 20$ palavras. No caso (iii), temos 5 possibilidades para escolher a primeira letra, 4 possibilidades para escolher a segunda e 3 possibilidades para escolher a terceira letra. Como as letras devem permanecer em ordem alfabética, devemos descontar o número de maneiras que essas letras podem ser reordenadas, ou seja, devemos dividir nossa resposta por $3! = 6$. Portanto, o número de palavras neste caso é $5 \times 4 \times 3/6 = 10$. Pelo princípio aditivo, temos $5 + 20 + 10 = 35$ palavras possíveis.

2. Temos três casos possíveis: (i) uma mesma letra aparece 4 vezes na palavra e as 6 letras restantes são todas distintas entre si; (ii) uma mesma letra aparece 3 vezes na palavra, outra letra aparece 2 vezes e as 5 letras restantes são todas distintas entre si; (iii) três letras distintas aparecem em pares na palavra e as 4 letras restantes são todas distintas entre si.

(i) Temos 7 maneiras de escolher a letra que irá se repetir e $10 \times 9 \times 8 \times 7$ modos de escolher as 4 posições na palavra que serão ocupadas por esta letra, pois temos 10 maneiras de escolher a primeira posição, 9 maneiras para a segunda posição, 8 maneiras para a terceira posição e 7 maneiras para a quarta posição. Fazendo deste modo, entretanto, cada palavra foi contada a mais $4! = 24$ vezes, pois as 4 letras que irão ocupar as 4 posições escolhidas são idênticas, logo permutando-as entre si enquanto se mantêm as demais fixas formariam a mesma palavra. Portanto, devemos dividir nossa resposta final por $4!$. Para concluir, temos 6 letras restantes para ocuparem os 6 espaços que sobraram, o que pode ser feito de $6! = 720$ modos. Assim, a resposta nesse caso é $7 \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!} \times 6! = 1058400$ palavras.

- (ii) Temos 7 maneiras de escolher a letra que irá se repetir 3 vezes e 6 maneiras de escolher a letra que irá se repetir 2 vezes. Para a letra que irá se repetir 3 vezes, assim como no caso anterior, temos $10 \times 9 \times 8/3!$ modos de posicionar essas letras. Para a letra que irá se repetir duas vezes, assim como no caso anterior, temos $7 \times 6/2!$ modos de posicionar essas letras. Para concluir, temos 5 letras restantes para ocuparem os 5 espaços que sobraram, o que pode ser feito de $5! = 120$ modos. Assim, a resposta nesse caso é $7 \times 6 \times \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} \times \frac{7 \times 6}{2!} \times 5! = 12700800$.
- (iii) Temos 7 maneiras de escolher a primeira letra que irá se repetir, 6 maneiras de escolher a segunda letra que irá se repetir e 5 maneiras de escolher a terceira letra que irá se repetir, uma vez feito isso, precisamos dividir por $3!$, pois a ordem dessas escolhas não faz diferença. Agora, precisamos escolher as posições que essas letras irão ocupar. Temos $10 \times 9/2!$ maneiras de escolher as posições para o primeiro par de letras, $8 \times 7/2!$ maneiras de escolher as posições para o segundo par de letras e $6 \times 5/2!$ maneiras de escolher as posições para o terceiro par de letras. Para concluir, temos 4 letras para ocupar os 4 espaços que sobraram, o que pode ser feito de $4!$ maneiras. Assim, a resposta nesse caso é $\frac{7 \times 6 \times 5}{3} \times \frac{10 \times 9}{2!} \times \frac{8 \times 7}{2!} \times \frac{6 \times 5}{2!} \times 4! = 15876000$.

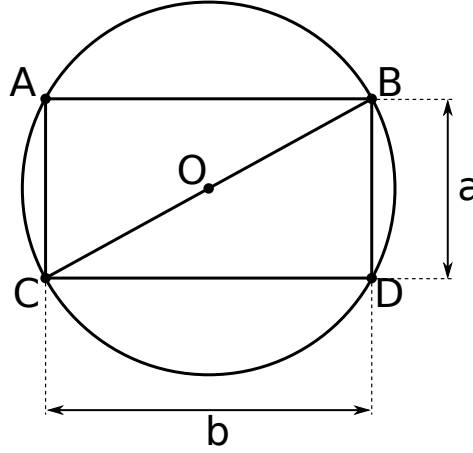
Portanto, pelo princípio aditivo temos $15876000 + 12700800 + 1058400 = 29635200$ palavras distintas que podem ser formadas satisfazendo as condições do enunciado.

05. Durante os intervalos de seu estudo para olimpíadas de Matemática, o aluno Pedro desenhou uma circunferência C e um retângulo R inscrito naquela circunferência.

Se C e R tem respectivamente π e 1 unidades de área, quais são as medidas dos lados do retângulo R ?

RESOLUÇÃO:

A figura abaixo auxiliará na compreensão da resolução.



Vamos supor que as medidas dos lados de R sejam a e b . Como a área de R é 1 unidade então

$$a \cdot b = 1. \quad (1)$$

Sendo a área de C de π unidades, então seu raio é 1. Sabendo que R está inscrito em C então obtemos que o segmento de reta que liga o centro de C até um dos vértices de R é 1 unidade, e consequentemente, a diagonal de R mede 2 unidades. Considere o triângulo retângulo com catetos cuja medidas sejam a e b , hipotenusa cuja medida seja 2. No que segue, vamos mostrar uma relação entre as medidas dos catetos e a hipotenusa usando semelhança de triângulos. Vamos denominar esse triângulo por $\triangle ABC$, onde AB e AC denotam os catetos e BC denota a hipotenusa. No triângulo $\triangle ABC$, retângulo em A , a altura AH (perpendicular a BC , no qual H é um ponto do segmento BC), referente à hipotenusa, origina dois triângulos semelhantes ao triângulo maior, em vista da congruência dos ângulos ($B\hat{A}C$ e $C\hat{A}H$).

Portanto, temos proporcionalidade entre os lados, um para cada triângulo parcial ou total. Além disso, denote por m e n as medidas dos segmentos BH e HC , respectivamente. Consequentemente, temos um triângulo retângulo com altura h e projeções m e n dos catetos a e b , respectivamente.

Logo,

$$\frac{b}{2} = \frac{m}{b} \quad \text{e} \quad \frac{a}{2} = \frac{n}{a}.$$

A expressão acima fornece $b^2 = 2m$ e $a^2 = 2n$. Assim, obtemos

$$a^2 + b^2 = 2m + 2n = 2(m + n) = 2 \cdot 2 = 4,$$

isto é,

$$a^2 + b^2 = 4. \quad (2)$$

Substituindo a relação (1) em (2) segue que

$$a^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = 4 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 4 \Rightarrow \frac{a^4 + 1}{a^2} = 4 \Rightarrow a^4 - 4a^2 + 1 = 0. \quad (3)$$

Faça $y = a^2$, onde $a > 0$ e $y > 0$. Logo, a partir de (3), temos

$$y^2 - 4y + 1 = 0.$$

Resolvendo a equação acima encontramos as seguintes raízes $y = 2 - \sqrt{3}$ e $y = 2 + \sqrt{3}$, onde ambas as raízes são positivas.

Assim, da relação $y = a^2$ temos que

$$a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad a = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Usando a relação (1) garantimos que, se $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ então $b = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ ou vice-versa.

Portanto, as medidas dos lados de R são $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ e $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.