



1. Dado um número natural $n > 0$, definimos a operação unária n^* por

$$n^* = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

Encontre os números naturais n menores que 100 tal que n^* termina com a maior quantidade de zeros.

Observação: A quantidade de zeros em que um número n^* termina é o maior número $k \in \mathbb{N}$ tal que $n^* = a \cdot 10^k$, onde $a \in \mathbb{N}$.

Solução:

A quantidade de zeros em que termina um natural m é dado pelo maior k para o qual 10^k é divisor de m . Com efeito, 10^k é divisor de m se, e só se, 2^k e 5^k são divisores de m .

Note que 5 divide um, e apenas um, dos números $n, n+1, n+2, n+3, n+4$. Como $n < 100$, se 5^k é divisor de n^* então $k \leq 2$.

Vale ainda que 2^2 divide n^* qualquer que seja n pois entre os números $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ existem pelo menos dois que são pares, qualquer que seja n .

n^* terminará em mais zeros se entre os números $n, n+1, n+2, n+3$ e $n+4$ houver um múltiplo de 25, o que é válido para $n = 21, 22, 23, 24, 25, 46, 47, 48, 49, 50, 71, 72, 73, 74, 75, 96, 97, 98$ e 99 .

2. Quantos são os divisores positivos de 2024^{2024} que são divisíveis por exatamente 2024 inteiros positivos?

Solução:

Temos que $2024 = 2^3 \cdot 11^1 \cdot 23^1$. Portanto, $2024^{2024} = 2^{6072} \cdot 11^{2024} \cdot 23^{2024}$.

Seja n um divisor de 2024^{2024} . Então, $n = 2^x \cdot 11^y \cdot 23^z$, em que $0 \leq x \leq 6072$, $0 \leq y \leq 2024$ e $0 \leq z \leq 2024$. Resulta que n é divisível por exatamente 2024 inteiros positivos se, e somente se,

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 2024 = 2^3 \cdot 23^1 \cdot 11^1.$$

Ora, podemos pensar nos números no lado esquerdo da igualdade, $x+1, y+1$ e $z+1$, como caixas e nos números no lado direito, 2, 2, 2, 11 e 23, como objetos a serem colocados nas caixas. Existem $C_5^2 = 10$ modos de se distribuir os números 2.

Com efeito, podemos colocar os três números 2 em uma mesma caixa (3 modos), dois números 2 em uma caixa e um número 2 em outra caixa (6 modos) ou um número 2 em cada caixa (1 modo).

Por fim, existem 3 modos de se distribuir o número 11 e 3 modos de se distribuir o número 23. Logo, existem $10 \cdot 3 \cdot 3 = 90$ divisores de 2024^{2024} que são divisíveis por exatamente 2024 inteiros positivos.

3. Para cada número inteiro positivo n associamos um número inteiro não negativo $f(n)$ de modo que se cumpram as seguintes regras:

1. $f(ab) = f(a) + f(b)$;
2. $f(n) = 0$ se n é um primo maior que 10;
3. $f(1) < f(3^5) < f(2) < 11$.

Sabendo que $f(2106) < 11$, qual o valor de $f(96)$?

Solução:

Pela propriedade 1. temos $f(3^5) = 5f(3)$.

Dado que $0 \leq f(1) < 5f(3) < f(2) < 11$, e que $5f(3)$ é um múltiplo de 5, temos $5f(3) = 5$, ou seja, $f(3) = 1$. Note que $2106 = 2 \cdot 3^4 \cdot 13$. Assim, pelas propriedades 1. e 2. temos que

$$f(2106) = f(2) + 4f(3) + f(13) = f(2) + 4.$$

De $f(2106) < 11$, segue que $f(2) < 7$. Usando 3. temos $5 < f(2) < 7$ e assim $f(2) = 6$.

Logo,

$$f(96) = f(3 \cdot 2^5) = f(3) + 5f(2) = 31.$$

4. Uma folha de papel na forma de um quadrado $ABCD$ de lado 10cm , é recortada e dobrada da seguinte forma: a partir dos pontos médios M e N dos segmentos AB e CD , respectivamente, considere os pontos I e Y no segmento MN tais que Y é o centro do quadrado, I está entre M e Y e o segmento IY mede 1cm . Considere também o ponto S dentro do retângulo $AMND$ tal que o triângulo ISY é isósceles com ângulo da base $\widehat{SYI} = 45^\circ$. Em seguida, a folha é recortada ao longo dos segmentos MI , IS e NY e dobrada ao longo de IY e YS simultaneamente, conforme as etapas descritas nas Figuras de 1 a 4, resultando na Figura 5.

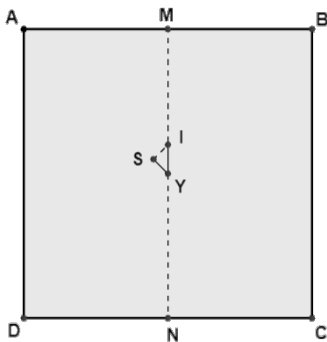


Figura 1

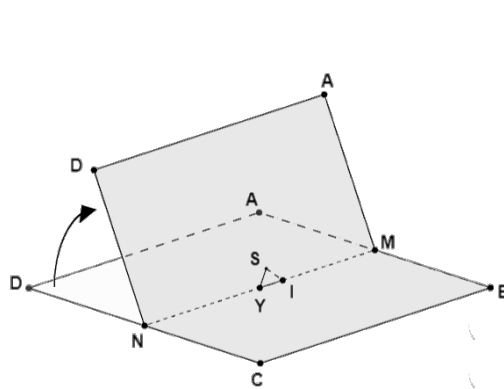


Figura 2

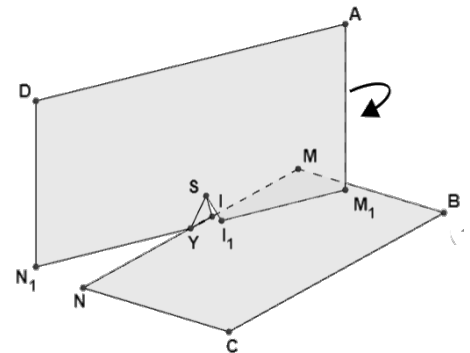


Figura 3

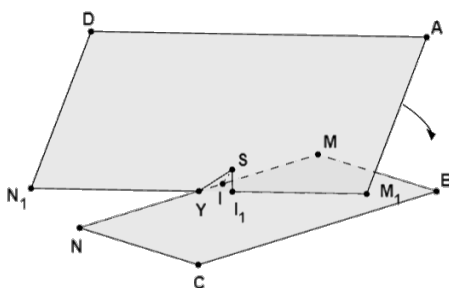


Figura 4

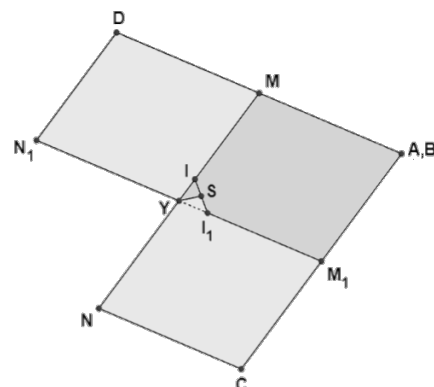
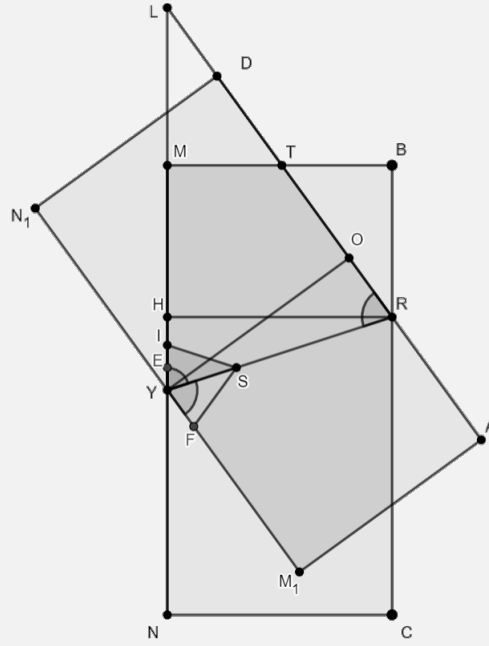


Figura 5

Se mudarmos as medidas dos ângulos da base do triângulo isósceles ISY de modo que $\widehat{SIY} = \widehat{SYI}$, $70^\circ < \widehat{SYI} < 75^\circ$, a área de ISY seja igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e fizermos uma dobra semelhante a descrita nas etapas acima, qual é o valor da área da região do retângulo $MBCN$ que será sobreposta pela região do retângulo AM_1N_1D após a dobra?

Solução:



Como $[ISY] = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos que a altura do triângulo ISY relativa ao lado IS é $h = \sqrt{2}$ e, pelo Teorema de Pitágoras, temos que $YS = \frac{3}{2}$. Agora, seja R o ponto do segmento AD que intersecta BC após a dobra. Prolongando os segmentos YM e RD , obtemos o ponto L e observamos que o triângulo YLR é semelhante ao triângulo ISY , pois o triângulo ISY é congruente ao triângulo YSF e os ângulos $\hat{SYR}$ e $\hat{ORY}$ são alternos internos, visto que YR é transversal aos segmentos paralelos AD e M_1N_1 , onde M_1 e N_1 são os pontos correspondentes a M e N , respectivamente, após a dobra conforme a figura acima. Além disso, seja O um ponto em RD tal que YO é paralelo à AM_1 , e seja E o ponto médio do segmento YI . Então os triângulos EYS e ROY são semelhantes (critério AA). Desta semelhança, obtemos

$$\frac{OR}{EY} = \frac{OY}{ES} \Rightarrow OR = \frac{\frac{1}{2} \cdot 5}{\sqrt{2}} \Rightarrow OR = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, ao triângulo ROY temos

$$(YR)^2 = (OY)^2 + (OR)^2 \Rightarrow YR = \sqrt{5^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2} \Rightarrow YR = \frac{15\sqrt{2}}{4}.$$

Da semelhança entre YLR e ISY temos que

$$\frac{LY}{SI} = \frac{YR}{IY} \Rightarrow LY = \frac{45\sqrt{2}}{8}.$$

Agora, seja H ponto de YM tal que o segmento HR seja paralelo a NC conforme a figura acima. Como os triângulos ROY e YHR são congruentes (caso ALA), temos que $HY = OR = \frac{5\sqrt{2}}{4}$. Seja T o ponto do segmento AD que intersecta MB após a dobra conforme a figura acima. Observe que os triângulos LHR e LMT são semelhantes (critério AA). Como

$$LH = LY - HY = \frac{45\sqrt{2}}{8} - \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{35\sqrt{2}}{8} \quad \text{e} \quad LM = LY - MY = \frac{45\sqrt{2}}{8} - 5,$$

temos

$$\frac{MT}{HR} = \frac{LM}{LH} \implies MT = \frac{45\sqrt{2} - 40}{7\sqrt{2}}.$$

Desta forma, a área do triângulo LMT é

$$[LMT] = \frac{LM \cdot MT}{2} = \frac{\left(\frac{45\sqrt{2} - 40}{8}\right) \left(\frac{45\sqrt{2} - 40}{7\sqrt{2}}\right)}{2} = \frac{(45\sqrt{2} - 40)^2}{112\sqrt{2}},$$

e a área de LYR é

$$[LYR] = \frac{LY \cdot HR}{2} = \frac{\frac{45\sqrt{2}}{8} \cdot 5}{2} = \frac{225\sqrt{2}}{16}.$$

Logo a área sobreposta A_S é dada por

$$A_S = 2 \cdot [YMTR] - [ISY] = 2 \cdot ([LYR] - [LMT]) - [ISY]$$

Assim,

$$A_S = 2 \left(\frac{225\sqrt{2}}{16} - \frac{(45\sqrt{2} - 40)^2}{112\sqrt{2}} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1800 - 639\sqrt{2}}{28}$$

5. Aline, Bárbara e Clara são as únicas atendentes do setor de vendas de uma empresa de telemarketing. As três recebem uma planilha, conforme abaixo, com informações de 2023 clientes que devem ser contactados:

Número	Nome	Atendente
1	Cliente 1	
2	Cliente 2	
3	Cliente 3	
$\vdots$	$\vdots$	
2023	Cliente 2023	

No intuito de dividir o trabalho entre si, as três começam a preencher a terceira coluna da planilha, informando quem irá contactar cada cliente. De quantos modos distintos isso pode ser feito, se cada atendente deve ligar para um número ímpar de clientes, e se cada cliente só pode ser contactado por exatamente uma atendente?

Solução:

Note que cada modo distinto de se dividir os clientes entre as atendentes corresponde a uma sequência de comprimento 2023, formada apenas pelas letras A , B e C , de modo que cada letra apareça um número ímpar de vezes. Seja a_n o número de sequências de comprimento n que cumprem a condição do problema. Note que n é ímpar.

Dada uma sequência de comprimento $n + 2$, temos duas possibilidades:

- (i) a sequência termina em duas letras idênticas;
- (ii) a sequência termina em duas letras distintas.

No primeiro caso, se removermos as duas últimas letras, obteremos uma sequência de comprimento n cumprindo a condição do problema. Como há 3 possibilidades para a letra que se repetirá ao final da sequência, há $3a_n$ tais sequências.

No segundo caso, a sequência obtida retirando-se as duas últimas letras será uma sequência de comprimento n que não cumpre a condição do problema. Com efeito, a sequência terá duas letras ocorrendo um número

par de vezes e a terceira letra, um número ímpar de vezes. Assim, para contar as sequências de comprimento $n+2$ no segundo caso, basta observar que tais sequências são obtidas a partir das sequências de comprimento n que não cumprem a condição do problema acrescidas de uma cópia de cada letra que ocorre um número par de vezes, em alguma ordem. Ora, existem $2(3^n - a_n)$ tais sequências. Portanto, o número total de sequências de comprimento $n+2$ é

$$a_{n+2} = 3a_n + 2(3^n - a_n) = a_n + 2 \cdot 3^n.$$

Definindo $b_n = a_n/3^n - 1/4$, vem que

$$a_{n+2} = a_n + 2 \cdot 3^n \Leftrightarrow b_{n+2} = \frac{1}{9}b_n.$$

A equação característica associada é

$$\lambda^2 = \frac{1}{9}.$$

Daí, resulta que $\lambda = 1/3$ ou $\lambda = -1/3$. Segue que a solução geral tem a forma

$$b_n = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Reescrevendo em termos de a_n , vem que

$$a_n = c_1 - c_2 + \frac{3^n}{4}.$$

Usando o fato de que $a_1 = 0$ e $a_3 = 6$, obtemos

$$a_n = \frac{3}{4}(3^{n-1} - 1).$$

Resulta que $a_{2023} = \frac{3}{4}(3^{2022} - 1)$.