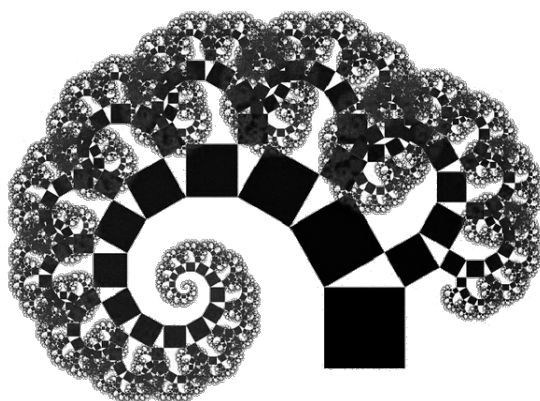


1. As Árvores Pitagóricas são objetos fascinantes da Teoria dos Fractais, que ilustram como a matemática pode gerar figuras complexas a partir de formas geométricas simples. Esse processo criativo revela a beleza da matemática, onde simplicidade e complexidade se encontram. Um exemplo é apresentado na figura a seguir:

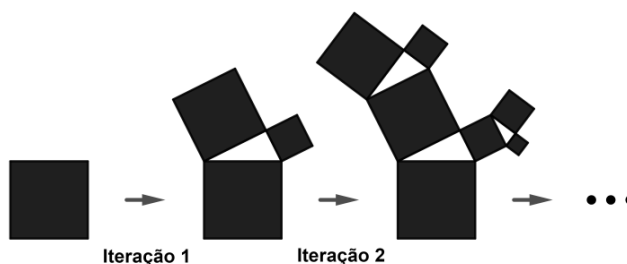


Inicialmente, temos um quadrado (tronco inicial da árvore) cujo lado mede  $L$  unidades de comprimento.

- (i) Construimos sobre o lado oposto à base do quadrado, um triângulo retângulo, tendo este lado como hipotenusa;
- (ii) Sobre cada cateto do triângulo anterior, construímos um quadrado tendo esse cateto como lado.

Para cada novo quadrado obtido, repetimos as construções descritas em (i) e (ii), considerando como base de cada quadrado os catetos obtidos na iteração anterior, de forma que os novos triângulos sobre os lados de cada novo quadrado sejam sempre semelhantes ao triângulo do item (i).

Na figura abaixo ilustramos algumas etapas do processo iterativo.



- (A) Quantos quadrados obtemos ao realizarmos 10 iterações?
- (B) Quantos triângulos obtemos ao realizarmos 20 iterações?
- (C) Qual o valor da soma das medidas das áreas de todos os quadrados obtidos ao realizarmos  $n$  iterações?

**Solução:**

(A) No início temos 1 quadrado e a cada nova iteração a quantidade de novos quadrados em relação a iteração anterior é duas vezes a quantidade anterior, portanto, sendo  $Q_{10}$  a quantidade de quadrados após a décima iteração temos que

$$Q_{10} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} = 2^{10+1} - 1 = 2047.$$

(B) Perceba que a quantidade  $T_n$  de triângulos formados após a  $n$ -ésima etapa é, por construção, igual a quantidade de quadrados da etapa anterior, ou seja,  $T_n = Q_{n-1} = 2^n - 1$ .

$$T_{20} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20} - 1 = 2^{20+1} - 1 =$$

(C) Observe a figura após a primeira etapa (com três quadrados). Como o triângulo é retângulo, vale o Teorema de Pitágoras, portanto a soma das áreas dos quadrados menores é igual a do quadrado maior que é  $L^2$  unidades. Analogamente, aplicando o Teorema de Pitágoras sucessivas vezes, conseguimos mostrar que a soma de todas as áreas dos quadrados em uma  $n$ -ésima etapa é igual a  $(n+1)L^2$ .

2. Os 15 membros da comissão de provas da OPEMAT estavam sentados em torno de uma mesa redonda quando, de repente, o coordenador da OPEMAT entra na sala, esbaforido, gritando:

– “Pessoal, é urgente! Temos uma demanda enorme e pouca gente para ajudar. O que faremos agora?” –

Após uma longa discussão, ele decide escolher aleatoriamente três membros da comissão de provas para auxiliá-lo nas tarefas pendentes.

De quantas maneiras ele pode escolher estes três membros de forma que pelo menos dois destes estejam sentados um ao lado do outro?

#### Solução:

Podemos separar em dois casos, à saber: o caso em que os três membros escolhidos estão juntos e o caso em que dois deles estão juntos e outro está afastados desses dois.

No primeiro caso, basta escolher um deles. Depois, escolhemos os dois mais próximos no sentido anti horário. Podemos fazer isso de 15 maneiras.

No segundo caso, os dois que ficarão juntos escolhendo primeiro um deles e depois o outro que fica mais próximo no sentido anti horário. Isso pode ser feito de 15 maneiras. Depois, escolhemos o que fica afastado. ele não pode estar junto dos outros dois e daí teríamos  $15-4=11$  maneiras de escolhê-lo. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos  $15 \cdot 11 = 165$  maneiras de fazer a escolha no segundo caso.

Como o caso 1 não pode acontecer simultaneamente com o caso 2, e eles esgotam todas as possibilidades, pelo princípio aditivo, teremos  $15+165=180$  possibilidades no total.

3. Um número natural  $n$  é dito **JOGLIANO** quando a soma dos algarismos de  $n$  é um múltiplo de 7 e a soma dos algarismos de seu antecessor,  $n-1$ , também é um múltiplo de 7. Por exemplo, 160.000 é um número **JOGLIANO** enquanto 361.004 não é. Determine o menor número **JOGLIANO**.

#### Solução:

Seja  $n$  um número **JOGLIANO**. Considere a expansão decimal de  $n$  dada por

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + a_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

para algum  $k \in \mathbb{N}$ , onde  $a_k \neq 0$  e  $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , com  $0 \leq i \leq k$ .

Consequentemente,

$$n - 1 = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + a_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 - 1.$$

Seja  $S_n$  a soma dos algarismos do número  $n$ , isto é,  $S_n = \sum_{i=0}^k a_i$ . Supondo que  $a_0 \neq 0$ , temos que  $S_{n-1} = a_0 - 1 + \sum_{i=1}^k a_i$ . Logo,  $S_n - S_{n-1} = 1$ , o que contradiz o fato de  $n$  ser um número **JOGLIANO**, pois  $S_n$  e  $S_{n-1}$  são múltiplos de 7. Segue que  $a_0 = 0$ .

Seja  $j$  o maior índice para o qual  $a_j = 0$ . Então

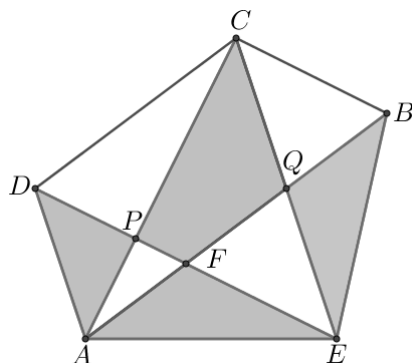
$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_{j+1} \cdot 10^{j+1}$$

Note que

$$n - 1 = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + (a_{j+1} - 1) \cdot 10^{j+1} + 9 \cdot 10^j + 9 \cdot 10^{j-1} + \dots + 9.$$

Daí vem que  $S_n - S_{n-1} = 1 - 9j$ . Sendo  $S_n = a_k + a_{k-1} + \dots + a_{j+1} + 0 + 0 + \dots + 0$  múltiplo de 7 então  $S_{n-1}$  é múltiplo de 7 se, e somente se,  $1 - 9j$  é múltiplo de 7. Portanto, o menor valor possível de  $j$  é 4 e o número  $n$  procurado é 70.000.

4. Na figura a seguir,  $AEBCD$  é um pentágono cujas diagonais  $AB$  e  $DE$ , que se intersectam no ponto  $F$ , são bases dos trapézios  $ABCD$  e  $BCDE$ , respectivamente. O ponto  $Q$  de interseção das diagonais  $AB$  e  $CE$  é ponto médio do segmento  $BF$  e o ponto  $P$  de interseção das diagonais  $AC$  e  $DE$  satisfaz a condição  $DP = \frac{2}{3}DF$ . Determine a área da região sombreada, sabendo que a área do pentágono  $AEBCD$  é  $24 \text{ cm}^2$



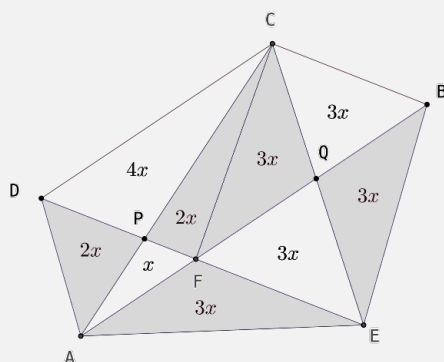
### Solução 1:

Fatos que ajudam:

$[A_1A_2\dots A_n]$  denota a área do polígono  $A_1A_2\dots A_n$ . Se  $AD$  é uma ceviana do triângulo  $ABC$  então  $\frac{[ABD]}{[ABC]} =$

$$\frac{BD}{BC} \text{ e } \frac{[ADB]}{[ADC]} = \frac{DB}{DC}.$$

Em particular, uma mediana divide a área do triângulo ao meio.



Note que  $BCDF$  é um paralelogramo, pois os lados opostos são paralelos. Além disso, sendo  $BQ = FQ$  e  $BC \parallel FE$  segue-se que os triângulos  $QBC$  e  $QFE$  são congruentes pelo critério (ALA). Daí,  $FE = BC = FD$  e  $BCFE$  é também um paralelogramo. Façamos  $[APF] = x$ . Como  $PD = 2PF$ , temos  $[APD] = 2x$ . Uma vez que  $F$  é ponto médio de  $DE$ , obtemos  $[AFE] = [AFD] = 3x$ .

Por outro lado, os triângulos  $CPD$  e  $APF$  são semelhantes (critério AA) de razão  $\frac{PD}{PF} = 2$ . Logo  $\frac{[CPD]}{[APF]} = 2^2 = 4$ , portanto  $[CPD] = 4x$ .

Ainda pela razão da semelhança entre os triângulos  $CPD$  e  $APF$ , temos  $PC = 2PA$  e, consequentemente,  $[CPF] = 2x$ .

Ademais, considerando o paralelogramo  $BCDF$ , obtemos  $FA = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}FB = FQ$  logo,  $F$  é ponto médio de  $AQ$  e  $[EFQ] = [EFA] = 3x$  (adicionalmente  $AQCD$  é um outro paralelogramo).

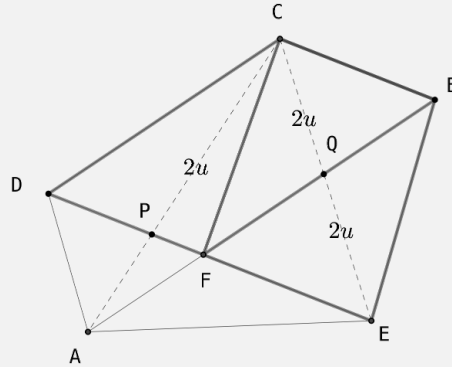
Como as diagonais do paralelogramo  $BCFE$  cortam-se ao meio, implica que  $[CQF] = [CQB] = [BQE] = [EQF] = 3x$ .

Somando as áreas de todas as regiões temos

$$[AEBCD] = 24x.$$

Com isso,  $x = 1$  e a área desejada é igual 13.

## Solução 2:



Do paralelismo das bases dos trapézios  $ABCD$  e  $BCDE$ , segue-se que o quadrilátero  $BCDF$  é um paralelogramo. Além disso, sendo  $BQ = FQ$  e  $BC \parallel FE$  temos que os triângulos  $QBC$  e  $QFE$  são congruentes pelo critério (ALA). Daí,  $FE = BC = FD$  e  $BCFE$  é também um paralelogramo. Sendo assim, os triângulos  $BFE$ ,  $BFC$  e  $CDF$  possuem mesma área (de fato esses triângulos são congruentes, mas é suficiente que dois quaisquer tenham bases e alturas relativas de mesma medida).

Façamos

$$[BFE] = [BFC] = [CDF] = 2u.$$

Note que os triângulos  $CDF$  e  $CDA$  possuem mesma altura relativa ao lado (base)  $CD$ , logo:

$$\begin{aligned} [CDF] = [CDA] &\Rightarrow [\cancel{CDP}] + [CPF] = [\cancel{CDP}] + [ADP] \\ &\Rightarrow [CPF] = [ADP] \end{aligned}$$

Contudo, a relação  $PF = \frac{1}{3}DF$  implica

$$[CPF] = \frac{1}{3} \cdot [CDF] = \frac{2}{3}u.$$

Portanto,

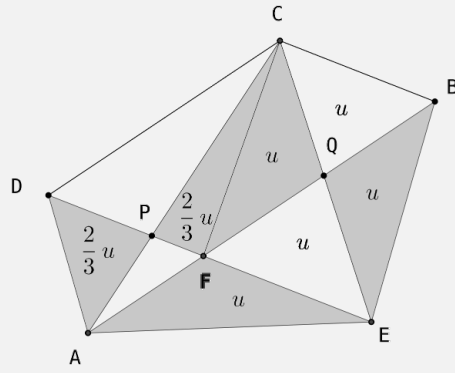
$$[ADP] = \frac{2}{3}u.$$

Ora, sendo  $DP = \frac{2}{3}DF$ , obtemos  $[ADP] = \frac{2}{3}[ADF]$ , ou seja,  $[ADF] = u$ .

Uma vez que  $AF$  é mediana do triângulo  $ADE$  tem-se:

$$[ADF] = 2u.$$

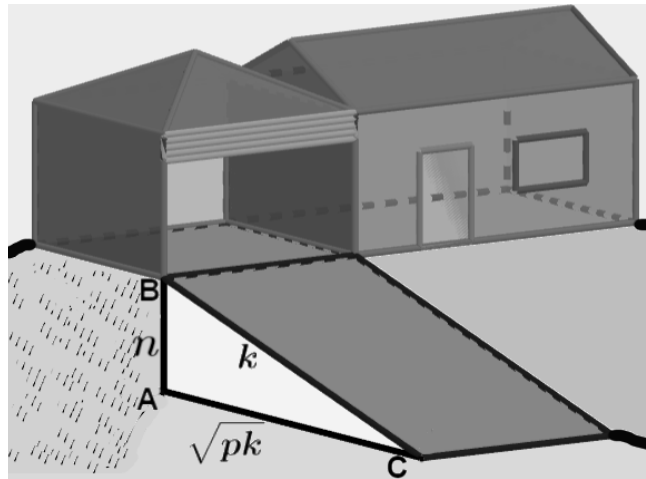
Desta forma,  $[AEBCD] = 8u = 24$ , donde  $u = 3$ .



Finalmente, a área sombreada é dada por

$$[AEF] + [EQB] + [QCF] + [CPF] + [ADP] = 3u + 2 \cdot \frac{2}{3}u = 9 + 4 = 13$$

5. O pai do  $\pi$ -raia está projetando uma nova rampa de acesso a garagem de sua casa conforme a figura abaixo.



Ele deseja que o comprimento  $k$  e a altura  $n$  da rampa projetada sejam números naturais. Sabendo que  $p$  é um primo ímpar, obtenha uma expressão para  $k$  dependendo de  $p$  (ou em função de  $p$ ) de modo que estas condições sejam satisfeitas.

**Solução:**

Seja  $n = \overline{AB}$ . Pelo Teorema de Pitágoras,

$$k^2 = n^2 + pk,$$

ou, equivalentemente,

$$k^2 - pk - n^2 = 0.$$

Pela Fórmula de Bhaskara,

$$k = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4n^2}}{2} \quad \text{ou} \quad k = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4n^2}}{2} \quad (1)$$

Como  $k \in \mathbb{N}$ , devemos ter necessariamente que  $p^2 + 4n^2$  é um quadrado perfeito, ou seja, existe  $q \in \mathbb{N}$  tal que

$$q^2 = p^2 + 4n^2.$$

Logo,

$$p^2 = q^2 - 4n^2 = (q - 2n)(q + 2n).$$

Como  $p$  é primo e  $p \geq 3$ , temos que  $q - 2n = 1$  e  $q + 2n = p^2$ . Consequentemente,

$$q = \frac{p^2 + 1}{2} \quad \text{e} \quad n = \frac{p^2 - 1}{4}.$$

Substituindo em (1)

$$k = \frac{p + \frac{p^2 + 1}{2}}{2} = \frac{(p + 1)^2}{4} \quad \text{ou} \quad k = \frac{p - \frac{p^2 + 1}{2}}{2} = -\frac{(p + 1)^2}{4}.$$

Portanto, como  $k \in \mathbb{N}$ , vem que

$$k = \frac{(p + 1)^2}{4}.$$