OPEMAT

Olimpíada Pernambucana de Matemática 2023

Segunda Fase - Nível 3 (Ensino Médio)

CADERNO DE QUESTÕES

REALIZAÇÃO:

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

APOIO:

Associação Olimpíada Brasileira de Matemática

stone

LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. A prova é composta de 5 questões dissertativas: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos.

04. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

05. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

06. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

07. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.

08. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

09. Duração da prova: 4 horas.

Nome: ______________________________

Número da Identidade: ______________ Órgão Expedidor: ______________

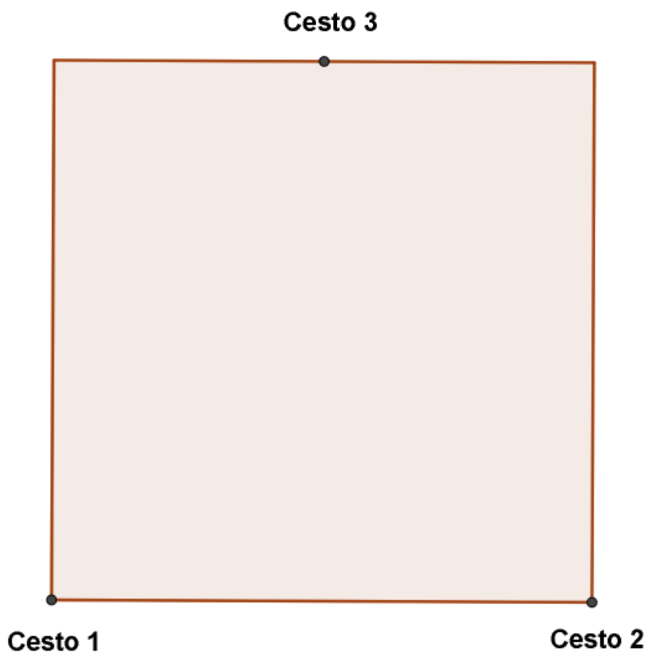
Assinatura: ______________________________

Q1. Sete dos amigos do π-raia, $N_1, N_2, \ldots, N_7$ decidem participar de um torneio local de futebol. O torneio é composto de 3 partidas de 90 minutos cada. Suponha que, em qualquer momento da partida, um e apenas um dos amigos do π-raia pode entrar em campo, e que o tempo total (que é medido em minutos) em campo para cada um dos amigos N_1, N_2, N_3 e N_4 é divisível por 7 e o tempo total para cada um dos amigos N_5, N_6 e N_7 é divisível por 13. Se não houver restrição sobre o número de substituições que podem ser realizadas durante cada partida, de quantos modos podemos distribuir o tempo total da partida entre os amigos do π-raia, de modo que cada amigo jogue pelo menos um minuto?

Q2. Três irmãos, Amanda, Alice e Arthur, estavam brincando juntos em um quarto retangular com $36m^2$ de área e espalharam brinquedos por todo o ambiente. No momento de arrumar a bagunça, a mãe deles posicionou três cestos idênticos da seguinte forma: dois nos cantos adjacentes a um dos lados do quarto e o terceiro no ponto médio do lado oposto, como exemplificado na figura abaixo. Para arrumar a bagunça de uma maneira geometricamente interessante, os irmãos resolveram dividir a área interna do quarto em três regiões (planas) otimizadas, de modo que:

- Cada uma das regiões contém exatamente um dos cestos;
- O interior de cada uma das regiões é formado por todos os pontos do interior do quarto cujo cesto mais próximo é aquele contido nesta região;

Os brinquedos contidos em cada região, devem ser guardados no cesto mais próximo. Após a divisão, eles verificaram que nenhum brinquedo estava sobre as fronteiras entre as regiões.



(A) Esboce cada uma das possíveis configurações (formas das regiões) para a divisão do quarto considerando a variação das suas dimensões. Justifique a sua resposta.

(B) Determine as medidas das áreas, em m^2, das três regiões.

Q3. Encontre todos os polinômios $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ de uma variável com coeficientes a_0, $a_1, \cdots, a_n$ inteiros para os quais a equação polinomial

$$P(x) = z$$

tem pelo menos uma solução inteira qualquer que seja $z \in \mathbb{Z}$.

Q4. Encontre todos os pares de inteiros (m, n) tais que $\sqrt{n+\sqrt{2^5 \cdot 2023}}+\sqrt{m-\sqrt{2^5 \cdot 2023}} \in \mathbb{Z}$.

Q5. Um experimento para verificar a potência de um laser de precisão foi organizado da seguinte forma: São posicionados espelhos planos nos pontos A, B, C, D, E, F, G e H, sobre os lados de um quadrado, de forma que um laser emitido a partir do ponto A descreveu a linha poligonal fechada $AFCHBGDA$ conforme a figura. Verificou-se então a formação de duas regiões sendo uma com forma hexagonal $SNLYVM$ e uma pentagonal $YKROT$. Sabendo que as distâncias entre dois espelhos consecutivos na direção horizontal e vertical medem l unidades de comprimento, determine as áreas das regiões pentagonal e hexagonal descritas acima, em termos de l.