



Olimpíada Pernambucana de Matemática 2023
Segunda Fase - Nível 2 (8º e 9º anos)

CADERNO DE QUESTÕES

REALIZAÇÃO:



APOIO:



LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.
02. Preencha os dados pessoais.
03. A prova é composta de 5 questões dissertativas: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos.
04. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.
05. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.
06. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.
07. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.
08. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.
09. Duração da prova: 4 horas.

NOME: _____

NÚMERO DA IDENTIDADE: _____ ÓRGÃO EXPEDIDOR: _____

ASSINATURA: _____

Q1. Deseja-se construir um tanque para armazenar combustível, com formato de paralelepípedo retangular reto, com largura L , comprimento C e profundidade P . No projeto foi estabelecido que a soma $P + L + C$ deve ser igual a 113 metros e a profundidade P deve ser no mínimo 57 metros. Qual é o maior valor possível para o volume, em metros cúbicos, deste tanque de combustível?

Q2. Alan tem uma mania esquisita de formar seqüências de números naturais. Para formar uma seqüência, ele começa escolhendo o primeiro termo e o termo seguinte é obtido somando-se os dígitos do termo anterior. Por exemplo:

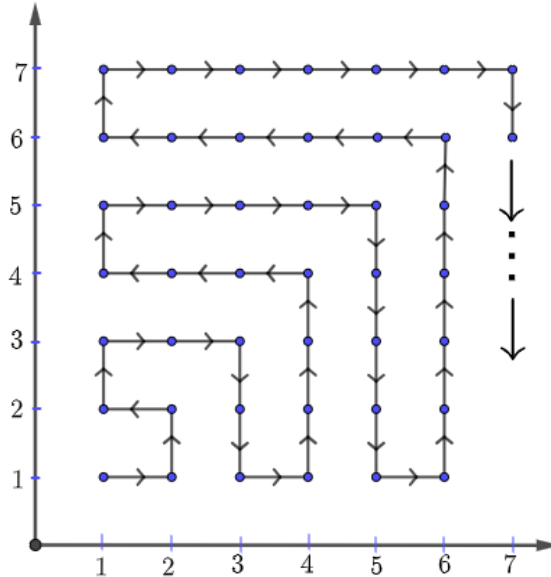
$$967988 \rightarrow 47 \rightarrow 11 \rightarrow 2$$

- (A) Mostre que, não importa de qual número Alan comece, sua mania sempre o leva à um número de apenas um dígito.
- (B) Encontre a quantidade de números entre 1 e 1.000.000 que chegam no número 1.

Q3. Vamos estabelecer uma sequência de pares ordenados da forma (n, m) onde n e m são números naturais. Esta sequência é construída marcando no primeiro quadrante do plano cartesiano os pontos da forma (n, m) onde $n, m \in \mathbb{N}$ (aqui vamos considerar que o "zero" não é um número natural). A sequência é construída "segundo a seta" conforme a figura abaixo. Vamos indicar por P_n o n -ésimo ponto dessa sequência. Iniciamos esta sequência definindo $P_1 = (1, 1)$ e seguindo a seta conforme a figura abaixo, teremos:

$$P_2 = (2, 1), \quad P_3 = (2, 2), \quad P_4 = (1, 2), \quad P_5 = (1, 3), \quad P_6 = (2, 3), \quad \dots$$

e assim sucessivamente.



Responda os itens abaixo, considerando a sequência estabelecida:

- (A) Determine P_7 a P_{12} .
- (B) Determine os números naturais n e m tais que $P_n = (6, 6)$ e $P_m = (100, 100)$.
- (C) Determine P_{2023} .

Q4. João e Pedro entram numa sala de aula e encontram o número 111 escrito na lousa. Então, eles decidem jogar um jogo onde cada um deles escreve, um após o outro, um número natural na lousa partindo do número 111 que já está escrito, de acordo com as seguintes regras: deve começar com o dígito que o anterior terminou, deve ser maior que o anterior, e deve ser menor que 1000.

Perde o jogo quem jogar um número depois do qual não é possível prosseguir. Exemplo: Se num jogo os números jogados são 113 e 333, 356 e 672, então o segundo jogador perde o jogo, pois, não existe número menor que 1000 e maior que 672 que comece m 2.

Mostre que existe uma estratégia em que o primeiro jogador sempre vença.

Q5. Chico aprendeu com seu pai Renato, que a curvatura de uma circunferência é definida por $K = \frac{1}{R}$, onde R é o raio da circunferência e que por este motivo, não se percebe a curvatura da terra olhando para o horizonte em uma praia, pois seu raio é de aproximadamente 6371 km. Após uma aula sobre grandezas e medidas, Chico resolveu criar a unidade de medida “ Pm ” a partir da medida do pé de sua mãe Taciana. Esta pediu a Chico para pegar um par de argolas em seu porta joias que possui o formato de cilindro reto de base circular. Ao retirar a tampa do porta joias, Chico percebeu que em seu fundo tinha uma argola em formato de circunferência com raio $\frac{1}{5} Pm$, um par de argolas também em formato de circunferência com raio $\frac{1}{8} Pm$ e um anel, de forma que as argolas de raio $\frac{1}{8} Pm$ eram tangentes entre si e tangentes a argola de raio $\frac{1}{5} Pm$, o anel era tangente as duas argolas menores e a parede lateral do porta joias era tangente a todas as argolas e ao anel. Considerando que todas as argolas e o anel estão apoiados no mesmo plano, Chico então percebeu que apenas com estas informações, era possível determinar a curvatura da circunferência da base do cilindro e a curvatura do anel. Quais os valores encontrados por Chico?