OPEMAT

Olimpíada Pernambucana de Matemática 2023

Segunda Fase - Nível 3 (Ensino Médio)

CADERNO DE QUESTÕES E SOLUÇÕES

REALIZAÇÃO:

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

APOIO:

Associação Olímpiada Brasileira de Matemática

stone

LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. A prova é composta de 5 questões dissertativas: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos.

04. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

05. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

06. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

07. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.

08. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

09. Duração da prova: 4 horas.

Nome: ____

Número da Identidade: ____________________ Órgão Expedidor: ____________________

Assinatura: ____

Q1. Sete dos amigos do π-raia, $N_1, N_2, \ldots, N_7$ decidem participar de um torneio local de futebol. O torneio é composto de 3 partidas de 90 minutos cada. Suponha que, em qualquer momento da partida, um e apenas um dos amigos do π-raia pode entrar em campo, e que o tempo total (que é medido em minutos) em campo para cada um dos amigos N_1, N_2, N_3 e N_4 é divisível por 7 e o tempo total para cada um dos amigos N_5, N_6 e N_7 é divisível por 13. Se não houver restrição sobre o número de substituições que podem ser realizadas durante cada partida, de quantos modos podemos distribuir o tempo total da partida entre os amigos do π-raia, de modo que cada amigo jogue pelo menos um minuto?

SOLUÇÃO: Seja x_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ é o tempo em minutos do i-ésimo amigo do π-raia em campo. Então, o problema se resume a encontrar as soluções inteiras positivas de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 270 \tag{1}$$

satisfazendo $7|x_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ e $13|x_j$ $(j = 5, 6, 7)$. Suponha que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7m$ e $x_5 + x_6 + x_7 = 13n$. Resulta que

$$7m + 13n = 270,$$

com $m, n \in \mathbb{N}_+$, $m \geq 4$ e $n \geq 3$. As soluções (m, n) da equação linear diofantina acima que atendem as condições acima são $(33, 3)$, $(20, 10)$ e $(7, 17)$.

Quando $(m, n) = (33, 3)$, temos que $x_5 = x_6 = x_7 = 13$. Pondo $x_i = 7y_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, obtemos

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 33.$$

Note que existe uma correspondência biunívoca entre as soluções inteiras positivas da equação acima e as permutações de um anagrama composto por 3 sinais de '+' e 29 sinais de '*'. Portanto, existem $C_{32}^3 = 4960$ quádruplas (y_1, y_2, y_3, y_4) que atendem as condições acima e portanto $1 \times 4960 = 4960$ soluções para a equação (1).

Se $(m, n) = (20, 10)$, pondo $x_i = 7y_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ e $x_j = 13y_j$ $(j = 5, 6, 7)$, temos que

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20 \quad \text{e} \quad y_5 + y_6 + y_7 = 10.$$

De forma análoga ao caso anterior, temos $C_{19}^3 \times C_9^2 = 34884$ soluções para (1).

Por fim, o caso em que $(m, n) = (7, 17)$ produz as equações (utilizando a mesma mudança de variável acima)

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7 \quad \text{e} \quad y_5 + y_6 + y_7 = 17.$$

Neste caso, temos $C_6^3 \times C_{16}^2 = 2400$ soluções para (1). Consequentemente, para (1) existem

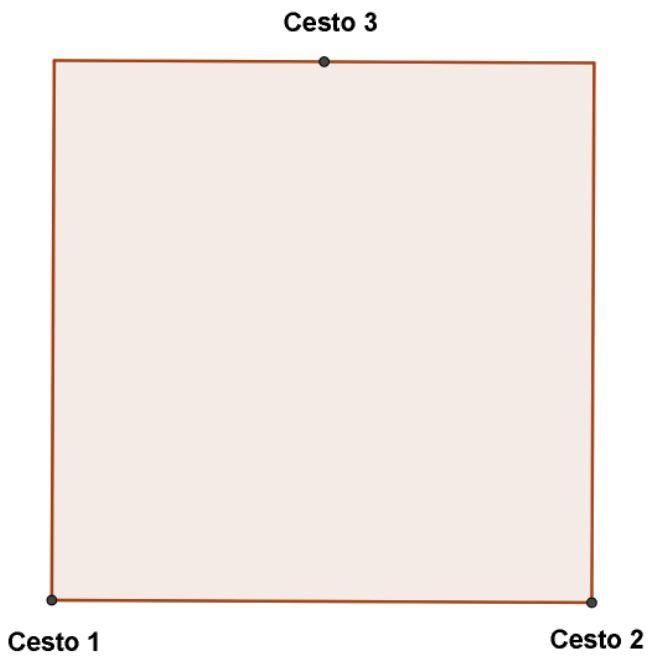
$$4960 + 34884 + 2400 = 42244$$

soluções satisfazendo as condições acima.

Q2. Três irmãos, Amanda, Alice e Arthur, estavam brincando juntos em um quarto retangular com $36m^2$ de área e espalharam brinquedos por todo o ambiente. No momento de arrumar a bagunça, a mãe deles posicionou três cestos idênticos da seguinte forma: dois nos cantos adjacentes a um dos lados do quarto e o terceiro no ponto médio do lado oposto, como exemplificado na figura abaixo. Para arrumar a bagunça de uma maneira geometricamente interessante, os irmãos resolveram dividir a área interna do quarto em três regiões (planas) otimizadas, de modo que:

- Cada uma das regiões contém exatamente um dos cestos;
- O interior de cada uma das regiões é formado por todos os pontos do interior do quarto cujo cesto mais próximo é aquele contido nesta região;

Os brinquedos contidos em cada região, devem ser guardados no cesto mais próximo. Após a divisão, eles verificaram que nenhum brinquedo estava sobre as fronteiras entre as regiões.



(A) Esboce cada uma das possíveis configurações (formas das regiões) para a divisão do quarto considerando a variação das suas dimensões. Justifique a sua resposta.

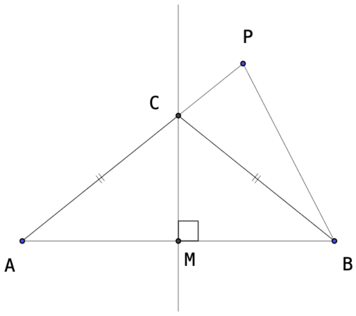
(B) Determine as medidas das áreas, em m^2, das três regiões.

SOLUÇÃO:

Fatos que ajudam:

Sabemos que reta perpendicular a um segmento AB dado passando pelo seu ponto médio é a mediatriz de AB e consiste do lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de A e B.

Afirmação 1: *O semiplano determinado pela mediatriz de AB e contendo o ponto B é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $PB \leq PA$. A igualdade ocorre se, e só se, P está na mediatriz de AB.*



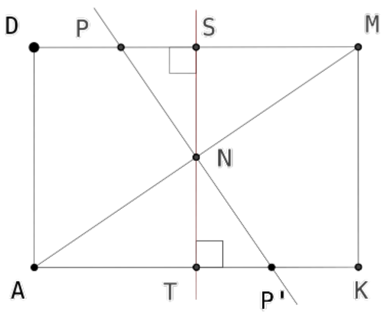
De fato, considere um ponto P do semiplano contendo A determinado pela mediatriz de AB fora da mediatriz e fora da reta AB. Seja C o ponto que em que a reta PB corta a mediatriz de AB. Então $CA = CB$. Pela desigualdade triangular,

$$PB < PC + CB = PC + CA = PA.$$

Afirmação 2: *Uma reta qualquer que passa pelo centro de um retângulo (ponto de encontro de suas diagonais) corta os lados opostos dos retângulo em pontos simétricos em relação ao centro. Além disso, divide o retângulo em dois polígonos congruentes e, consequentemente, de mesma área.*

Com efeito, suponha que uma reta passando pelo centro N de um retângulo corta um dos seus lados em um ponto P. Se P coincide com o ponto médio deste lado, o resultado é imediato, pois a reta cortará também o ponto médio do lado oposto (por Tales) e determinará dois retângulos congruentes.

Suponha que a reta corta um lado do retângulo, mas não em seu ponto médio. Para exemplificar o raciocínio, considere o retângulo $AKMD$ e uma reta passando por N cortando o lado DM em P em um ponto distinto do seu ponto médio S. Então, a reta NP corta a reta AK (paralela a DM) no ponto $'P$. A reta perpendicular ao lado DM passando por S contém N e corta o lado oposto AK em seu ponto médio T.



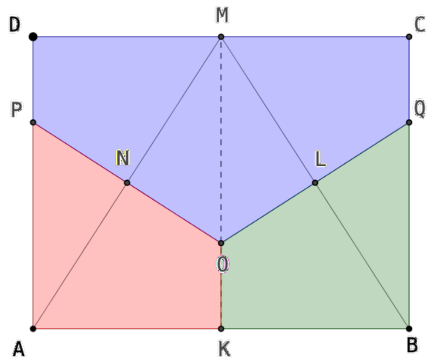
Desta forma, os triângulos PSN e $P'TN$ são congruentes (assim como os triângulos PMN e $P'AN$). Daí, os pontos P e P' são simétricos em relação ao ponto N. Além disso, as figuras $PDAP'$ e $P'KMP$ (com eventualmente $P = D$ e $P' = K$) são congruentes e temos as seguintes relações de áreas:

$$[PDAP'] = [ATSD] + [P'TN] - [PSN] = [ATSD] = [TKMS] = [P'KMP] = \frac{1}{2}[AKMD]$$

(A) Agora, considere um retângulo $ABCD$ (representando o quarto) com A, B e M pontos correspondendo aos cestos 1, 2 e 3, respectivamente. Sejam K ponto médio do lado AB, N ponto médio do lado AM, L ponto médio do lado BM e O circuncentro de ABM.

De acordo com as considerações feitas anteriormente, as regiões desejadas são obtidas pelas interseções dos semiplanos determinados pelas mediatrizes OK, OL e ON, dos lados do triângulo ABM, restritas ao interior retângulo $ABCD$.

Uma das possíveis configurações está representada pela figura a seguir.



Note que M pertence a mediatriz OK que divide o retângulo $ABCD$ em dois retângulos congruentes (KM eixo de simetria). Portanto, para obtermos as possíveis configurações das regiões, basta analisarmos o retângulo $AKMD$.

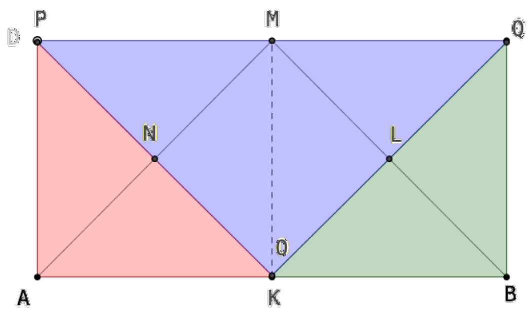
Considere o ponto P de interseção da mediatriz ON com a parte do retângulo $AKMD$ que está no mesmo semiplano determinado pela reta AM que contém o ponto D. Sejam $x = AK = 1/2AB$ e $y = AD$ as dimensões do quadrilátero $AKMD$. Daí, $x \cdot y = 18$.

Dependendo das dimensões do retângulo ou, equivalentemente, dependendo da natureza do triângulo ABM quanto aos ângulos, P pode ser um ponto do interior do lado AD ou coincidente com o ponto D ou um ponto do interior do lado DM, como veremos a seguir:

1ª Configuração: Se o triângulo ABM é retângulo em M ou, equivalentemente, se $AB = 6\sqrt{2}$ (ou $AD = 3\sqrt{2}$), então as três regiões são triangulares.

De fato, ABM é retângulo em M se, e somente se, K coincide com o circuncentro O de ABM. Pela afirmação 2, a reta KN corta AD no ponto D, simétrico de $K \equiv O$ em relação ao ponto N. Logo o retângulo $AKMD$ é um quadrado, pois suas diagonais são congruentes e perpendiculares. Isto ocorre se:

$$x = y \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = y = 3\sqrt{2}.$$

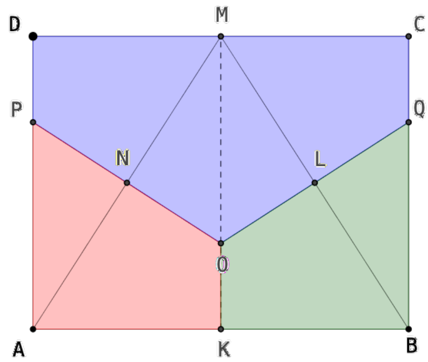


2ª Configuração: Se ABM é um triângulo acutângulo ou, equivalentemente, se $AB < 6\sqrt{2}$ (ou $AD > 3\sqrt{2}$), então as regiões são formadas por dois trapézios retângulos e um pentágono.

Note que o triângulo isósceles ABM é acutângulo se, e somente se, o circuncentro O pertence ao interior do triângulo ou, equivalentemente se $A\hat{M}B < 90°$. Como o circuncentro O pertence ao segmento KM, então o ponto P (simétrico de O) pertence ao lado AD. De outro modo,

$$A\hat{M}K < 45° \;\Rightarrow\; A\hat{M}K < M\hat{A}K \;\Rightarrow x = AK < KM = y \;\Rightarrow x < 3\sqrt{2}.$$

Ou seja, $AB < 6\sqrt{2}$ (ou $AD > 3\sqrt{2}$).

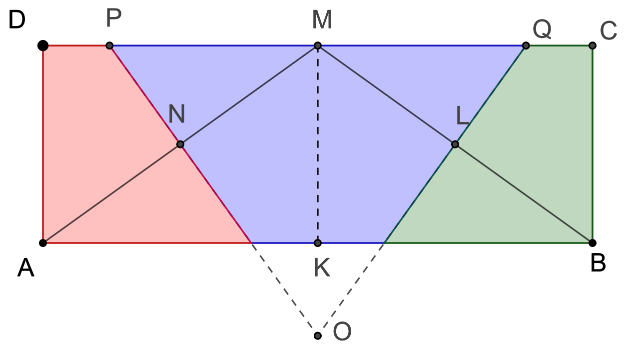


3ª Configuração: Se ABM é um triângulo obtusângulo ou, equivalentemente, se $AB > 6\sqrt{2}$ (ou $AD < 3\sqrt{2}$), então três regiões são formadas por trapézios, dois retângulos e um isósceles.

Finalmente, o triângulo ABM é obtusângulo se, e somente se, o circuncentro O pertence ao exterior do triângulo ou, equivalentemente se $A\hat{M}B > 90°$. Neste caso, a mediatriz de AM corta os lados AK e DM. Por outra análise, análoga ao caso anterior, temos

$$90° < A\hat{M}B < 180° \;\Rightarrow\; 45° < A\hat{M}K < 90° \Rightarrow\; M\hat{A}K < A\hat{M}K \;\Rightarrow y = MK < AM = x \;\Rightarrow x > 3\sqrt{2}.$$

Ou seja, $AB > 6\sqrt{2}$ (ou $AD < 3\sqrt{2}$).



(B) Com os argumentos de congruência e simetria estabelecidos na afirmação 2, podemos concluir que, independentemente da configuração, o retângulo $ABCD$ fica dividido em quatro partes de mesma área (figuras congruentes), de modo que as regiões dos cestos 1 e 2 correspondem a uma dessas partes cada e a região do cesto 3, fica ocupada por duas dessas partes. Logo, as áreas das regiões dos cestos 1, 2 e 3 são, respectivamente, 9m^2, 9m^2 e 18m^2.

Q3. Encontre todos os polinômios $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ de uma variável com coeficientes $a_0,\, a_1, \cdots, a_n$ inteiros para os quais a equação polinomial

$$P(x) = z$$

tem pelo menos uma solução inteira qualquer que seja $z \in \mathbb{Z}$.

Solução: Seja P um polinômio de grau n com coeficientes inteiros, digamos

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad \text{onde } a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}.$$

Considere o polinômio

$$Q(x) = P(x) - P(0) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x.$$

Note que: α é solução inteira de $P(x) = z$ se, e somente se, α é solução inteira de $Q(x) = z + P(0)$.

Assim, procurar soluções inteiras de $P(x) = z$ é equivalente a procurar soluções inteiras de $Q(x) = z + P(0)$. Portanto, as hipóteses para P são transferidas para Q. Agora, observe que

$$Q(x) = x\left(a_n x^{n-1} + a_{-2}x^{n-2} + ... + a_2x + a_1\right) \tag{2}$$

Por hipótese, a equação $Q(x) = 1$ tem solução inteiras. Logo, de (2), a solução dessa equação deve ser $x = \pm 1$. De maneira análoga, a equação $Q(x) = -1$ deve ter solução inteira e novamente de (2) essa solução deve ser $x = \pm 1$. Logo,

$$Q(\pm 1) = \pm 1 \tag{3}$$

Considere agora um número primo y. A equação $Q(x) = y$ tem solução inteira e da equação (2), a solução deve ser $x = \pm y$ ou $x = \pm 1$. Segue de (3), que $x = \pm y$. Portanto, um dos conjuntos abaixo é infinito:

$$A_1 = \{y \in \mathbb{N} : y \text{ é primo e } Q(y) = y\} \quad \text{ou} \quad A_2 = \{y \in \mathbb{N} : y \text{ é primo e } Q(-y) = y\}.$$

Assim, $Q(x) - x$ ou $Q(-x) - x$ tem infinitas raízes e portanto são identicamente nulos. Logo:

$$Q(x) \equiv x \quad \text{ou} \quad Q(-x) \equiv x.$$

Repare que a condição de que $\quad Q(-x) \equiv x$, equivale a:

$$Q(x) \equiv -x.$$

Portanto, um polinômio P satisfaz as condições do enunciado se, e só se, $P(x) = -x + c$ ou $P(x) = x + c$ para alguma constante $c \in \mathbb{Z}$.

Note por fim que se $P(x) = X + c$, onde $c \in \mathbb{Z}$, então as condições do enunciado são satisfeitas.

Q4. Encontre todos os pares de inteiros (m, n) tais que $\sqrt{n + \sqrt{2^5 \cdot 2023}} + \sqrt{m - \sqrt{2^5 \cdot 2023}} \in \mathbb{Z}$.

SOLUÇÃO: Temos que

$$\sqrt{n + \sqrt{2^5 \cdot 2023}} + \sqrt{m - \sqrt{2^5 \cdot 2023}} = a \in \mathbb{Z}$$

Logo,

$$m + n + 2\sqrt{(n + \sqrt{2^5 \cdot 2023})(m - \sqrt{2^5 \cdot 2023})} = a^2 \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, concluímos que

$$2 \cdot (n + \sqrt{2^5 \cdot 2023})(m - \sqrt{2^5 \cdot 2023}) \in \mathbb{Z}$$

Desenvolvendo o produto notável obtemos

$$4 \cdot (mn - 2^5 \cdot 2023 + (m - n)\sqrt{2^5 \cdot 2023}) \in \mathbb{Z}.$$

Isso só é possível quando $m = n$. Daí.

$$2m + 2\sqrt{m^2 - 2^5 \cdot 2023} = a^2 \in \mathbb{Z}.$$

Logo,

$$m^2 - 2^5 \cdot 2023 = q^2, q \in \mathbb{N}$$

Note que

$$2m + 2q = a^2 \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$a^2 > 2m > 2\sqrt{2023} > 89.$$

Note ainda que:

$$2 \cdot 2^5 \cdot 2023 = 2(m^2 - q^2) = a^2(m - q),$$

o que implica em

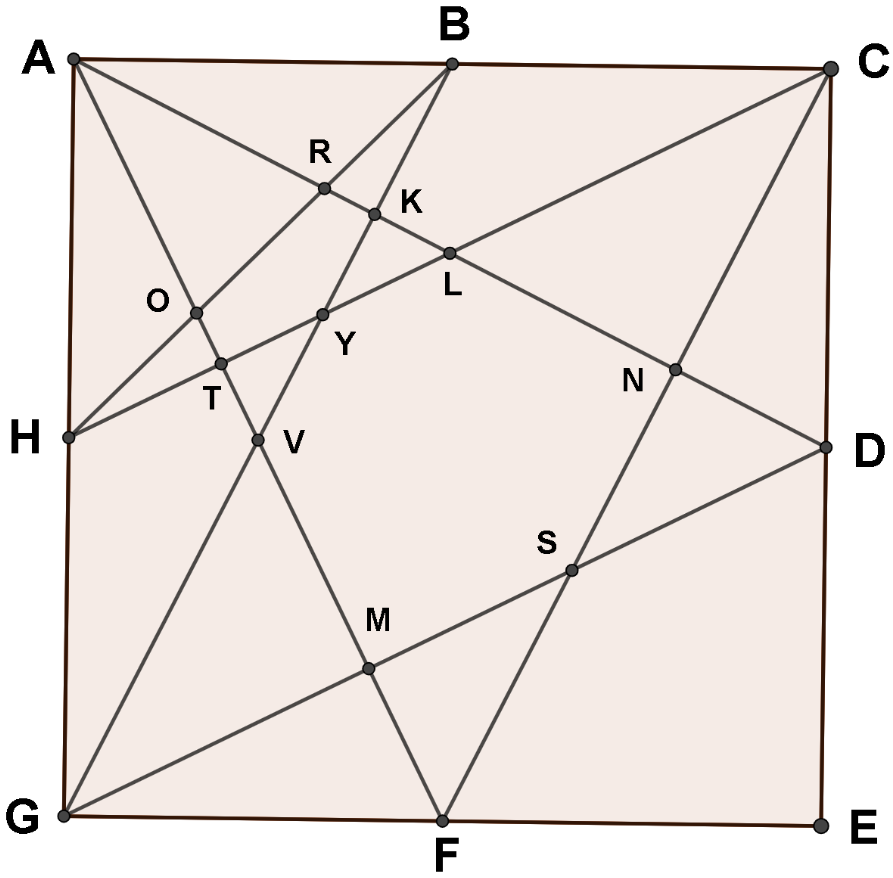
$$a^2 | 2 \cdot 2^5 \cdot 7 \cdot 17^2.$$

Como a é par, temos 3 possibilidades para $a^2 > 89$

- $a^2 = 2^2 \cdot 17^2$: Assim $m + q = 2 \cdot 17^2$, $m - q = 16 \cdot 7$, o que nos dá $m = 345$ e $a = 34$.
- $a^2 = 2^4 \cdot 17^2$: Assim $m + q = 2^3 \cdot 17^2$, $m - q = 2^2 \cdot 7$, o que nos dá $m = 1170$ e $a = 68$.
- $a^2 = 2^6 \cdot 17^2$: Assim $m + q = 2^5 \cdot 17^2$, $m - q = 7$, o que nos dá $m = \frac{9255}{2}$, Como m não é inteiro, descartamos esse caso.

Assim as soluções são $(m, n) = (345, 345)$ e $(m, n) = (1170, 1170)$.

Q5. Um experimento para verificar a potência de um laser de precisão foi organizado da seguinte forma: São posicionados espelhos planos nos pontos A, B, C, D, E, F, G e H, sobre os lados de um quadrado, de forma que um laser emitido a partir do ponto A descreveu a linha poligonal fechada $AFCHBGDA$ conforme a figura. Verificou-se então a formação de duas regiões sendo uma com forma hexagonal $SNLYVM$ e uma pentagonal $YKROT$. Sabendo que as distâncias entre dois espelhos consecutivos na direção horizontal e vertical medem l unidades de comprimento, determine as áreas das regiões pentagonal e hexagonal descritas acima, em termos de l.



SOLUÇÃO: Observe que:

1. Os triângulos GIS, CIS, ZIA e XIA são congruentes, logo $SI = XI = ZI$;
2. S é o baricentro do triângulo IFD, assim $SI = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{l\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{l\sqrt{2}}{3}$ ($\dfrac{2}{3}$ da metade da diagonal IE. Logo a área de ZIA, é

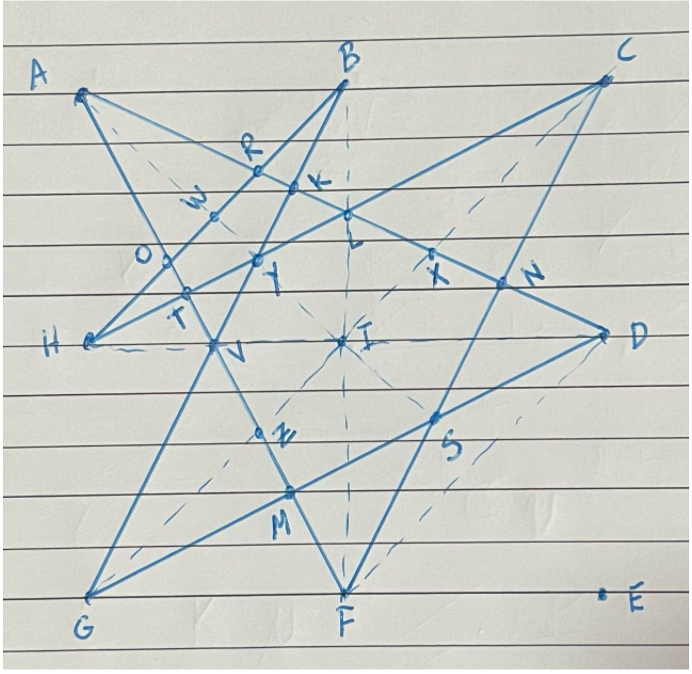
$$A(ZIA) = \frac{l\sqrt{2}.\dfrac{l\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{l^2}{3}.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ZIA que é retângulo em I, temos

$$ZA = \sqrt{(ZI)^2 + (AI)^2} = \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(l\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2l\sqrt{5}}{3}.$$

Observe que $XC = IC - IX = l\sqrt{2} - \dfrac{l\sqrt{2}}{3}$, logo $XC = \dfrac{2l\sqrt{2}}{3}$, e o triângulo ZIA é semelhante ao triângulo XNC. Logo

$$\frac{ZA}{XC} = \frac{ZI}{XN} \Longrightarrow \frac{\dfrac{2l\sqrt{5}}{3}}{\dfrac{2l\sqrt{2}}{3}} = \frac{\dfrac{l\sqrt{2}}{3}}{XN} \Longrightarrow XN = \frac{2l\sqrt{5}}{15}.$$



e

$$\frac{ZA}{XC} = \frac{AI}{CN} \Longrightarrow \frac{\frac{2l\sqrt{5}}{3}}{\frac{2l\sqrt{2}}{3}} = \frac{l\sqrt{2}}{CN} \Longrightarrow CN = \frac{2l\sqrt{5}}{5}.$$

Logo, a área do triângulo XNC é

$$A(XNC) = \frac{\frac{l\sqrt{5}}{15} . \frac{2l\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{2l^2}{15}.$$

Observe que:

(a) Os triângulos HWY,BWY, AWO e AWR são congruentes. Logo $WY = OW = WR$;

(b) Y é o baricentro de HIB, assim, $WY = \frac{1}{3}\left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{l\sqrt{2}}{6}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo HWY que é retângulo em W, obtemos

$$HY = \sqrt{(WY)^2 + (HW)^2} = \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{l\sqrt{5}}{3}.$$

Agora note que $HO = HW - OW = \frac{l\sqrt{2}}{2} - \frac{l\sqrt{2}}{6} = \frac{l\sqrt{2}}{3}$, e como o triângulo HWY é semelhante ao triângulo HOT, temos

$$\frac{HO}{HY} = \frac{OT}{WY} \Longrightarrow \frac{\frac{l\sqrt{2}}{3}}{\frac{l\sqrt{5}}{3}} = \frac{OT}{\frac{l\sqrt{2}}{6}} \Longrightarrow OT = \frac{l\sqrt{5}}{15}.$$

E,

$$\frac{HO}{HY} = \frac{HT}{HW} \Longrightarrow \frac{\frac{l\sqrt{2}}{3}}{\frac{l\sqrt{5}}{3}} = \frac{HT}{\frac{l\sqrt{2}}{2}} \Longrightarrow HT = \frac{l\sqrt{5}}{5}.$$

Logo, a área do triângulo HWY é

$$A(HWY) = \frac{\frac{l\sqrt{2}}{2} . \frac{l\sqrt{2}}{6}}{2} = \frac{l^2}{12}.$$

Como $VA = \dfrac{FA}{2} = \dfrac{\sqrt{l^2 + (2l)^2}}{2} = \dfrac{l\sqrt{5}}{2}$, Temos que

$$TV = VA - TA = VA - (TO + OA) = VA - (TO + HY) = \frac{l\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{l\sqrt{5}}{15} + \frac{l\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{l\sqrt{5}}{10},$$

e

$$TY = HY - HT = \frac{l\sqrt{5}}{3} - \frac{l\sqrt{5}}{5} = \frac{2l\sqrt{5}}{15}.$$

Logo, a área de TYV é

$$A(TYV) = \frac{\frac{l\sqrt{5}}{10}.\frac{2l\sqrt{5}}{15}}{2} = \frac{l^2}{30},$$

e a área do triângulo HOT é

$$A(HOT) = \frac{\frac{l\sqrt{5}}{5}.\frac{l\sqrt{5}}{15}}{2} = \frac{l^2}{30}.$$

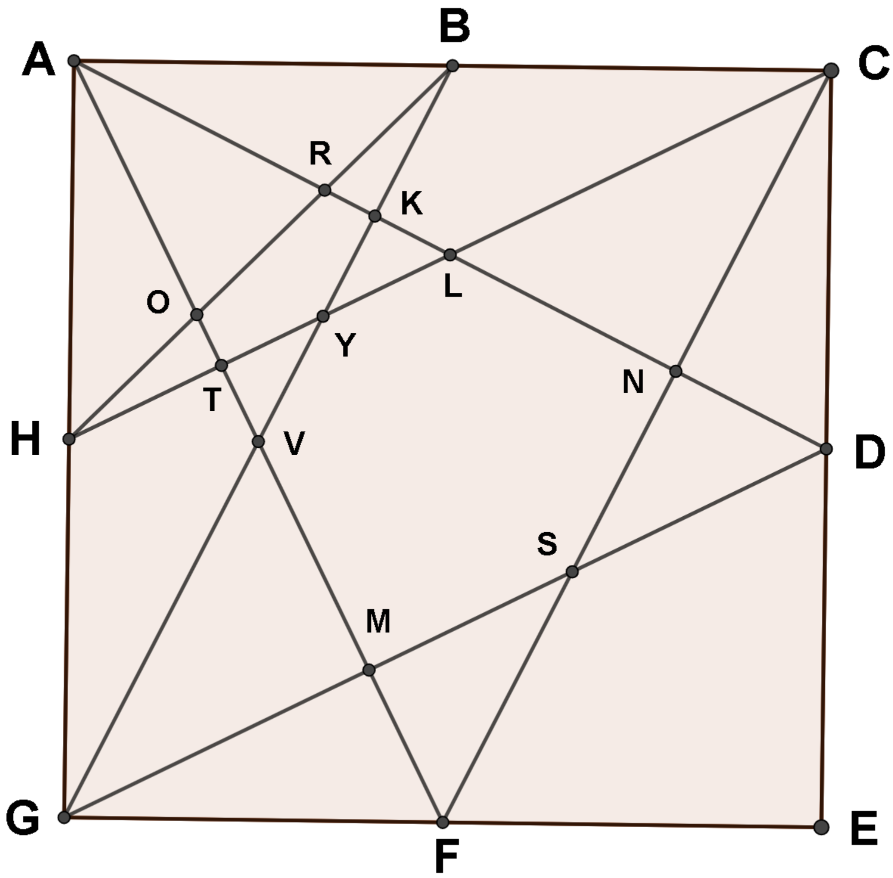
Assim, a área do pentágono $YKROT$ é

$$A(YKROT) = 2.A(HWY) - 2.A(HOT) = 2.\frac{l^2}{12} - 2.\frac{l^2}{30} = 2l^2\left(\frac{30-12}{360}\right) = \frac{l^2}{10}.$$

E a área do hexágono $SMVYLN$ é dada por

$$\begin{aligned} A(SMVYLN) &= 4.A(ZIA) - 2.A(XNC) - 2.A(TYV) - A(YKROT) - 2.A(HWY) \\ &= 4.\frac{l^2}{3} - 2.\frac{2l^2}{15} - 2.\frac{l^2}{30} - \frac{l^2}{10} - 2.\frac{l^2}{12} \\ &= 4.\frac{l^2}{3} - \frac{l^2}{3} - \frac{l^2}{10} - \frac{l^2}{6} \\ &= \frac{11l^2}{15} \end{aligned} \tag{4}$$

SOLUÇÃO ALTERNATIVA: Sem perda de generalidade, podemos assumir que $l = 1$. Vamos considerar um referencial de semieixos perpendiculares entre si dados pelos segmentos GE e GA, de acordo com a figura abaixo:



Nesse referencial, as coordenadas dos pontos serão dadas por $A(0,2)$, $B(1,2)$, $C(2,2)$, $D(2,1)$, $E(2,0)$, $F(1,0)$, $G(0,0)$ e $H(0,1)$.

Seja m_{XY} o coeficiente angular da reta que contém os pontos $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$, onde $m_{XY} = \dfrac{y_2 - x_2}{y_1 - x_1}$, desde que $y_1 \neq x_1$. Usando a figura acima, temos

$$m_{GD} = \frac{1}{2}, m_{FC} = 2, m_{GB} = 2, m_{FA} = -2, m_{HB} = 1, m_{HC} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad m_{AD} = -\frac{1}{2}$$

A equação da reta que contém os pontos X e Y é dada por $y - y_2 = m_{XY}(x - y_1)$ ou $y - x_2 = m_{XY}(x - x_1)$. As equações das retas são:

$$\begin{aligned}
GD &: \quad y = \frac{1}{2}x \\
FC &: \quad y = 2(x-1) \\
GB &: \quad y = 2x \\
FA &: \quad y = -2(x-1) \\
HB &: \quad y - 1 = x \\
HC &: \quad y - 1 = \frac{1}{2}x \\
AD &: \quad y - 2 = -\frac{1}{2}x
\end{aligned}$$

Usando as interseções das retas correspondentes, é possível encontrar os seguintes pontos:

$$
\begin{aligned}
M &= \left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right), S = \left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right), N = \left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right), L = \left(1,\frac{3}{2}\right), Y = \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right), T = \left(\frac{2}{5},\frac{6}{5}\right), V = \left(\frac{1}{2},1\right)\\
K &= \left(\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right), O = \left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right) \quad \text{e} \quad R = \left(\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right).
\end{aligned}
$$

No que segue, denotaremos por $\overline{XY}$ o comprimento do segmento XY, $A(SMVYLN)$ a área da região hexagonal, $A(ACEG)$ a área do quadrado e $A(\triangle FEC)$, $A(\triangle ANC)$, $A(\triangle AGF)$, $A(\triangle TYV)$, $A(\triangle ATL)$ e $A(\triangle MSF)$ as áreas dos triângulos $\triangle FEC$, $\triangle ANC$, $\triangle AGF$, $\triangle TYV$, $\triangle ATL$ e $\triangle MSF$, respectivamente.

Desde que os triângulos $\triangle FMS$, $\triangle TYV$ e $\triangle ATL$ são retângulos então usando a distância entre dois pontos e a fórmula clássica da área do triângulo, é possível concluir que

$$
\begin{aligned}
A(ACEG) &= 2\cdot 2 = 4\\
A(\triangle FEC) &= \frac{1}{2}\cdot\overline{FE}\cdot\overline{EC} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1\\
A(\triangle ANC) &= \frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\left(2-\frac{6}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{5} = \frac{4}{5}\\
A(\triangle AGF) &= \frac{1}{2}\cdot\overline{GF}\cdot\overline{AG} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1\\
A(\triangle TYV) &= \frac{1}{2}\cdot\overline{TV}\cdot\overline{TY} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{15} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{15}\cdot\frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{1}{30}\\
A(\triangle ATL) &= \frac{1}{2}\cdot\overline{TL}\cdot\overline{AT} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{10}\\
A(\triangle MSF) &= \frac{1}{2}\cdot\overline{MF}\cdot\overline{MS} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{15} = \frac{2}{15}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a área da região hexagonal é dada por

$$
\begin{aligned}
A(SMVYLN) &= A(ACEG) - A(FEC) - A(ANC) - A(AGF) - A(TYV) - A(ATL) - A(MSF)\\
&= 4 - 1 - \frac{4}{5} - 1 - \frac{1}{30} - \frac{3}{10} - \frac{2}{15}\\
&= 2 - \frac{4}{5} - \frac{1}{30} - \frac{3}{10} - \frac{2}{15}\\
&= \frac{60-24-1-9-4}{30}\\
&= \frac{11}{15}.
\end{aligned}
$$

Como o triângulo $\triangle KLY$ é retângulo, então usando a distância entre dois pontos e a fórmula clássica da área do triângulo, segue que

$$
\begin{aligned}
A(\triangle KLY) &= \frac{1}{2}\cdot\overline{KL}\cdot\overline{KY} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{15} = \frac{1}{30}\\
A(\triangle ABH) &= \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AH} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}\\
A(\triangle ABR) &= \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\left(2-\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{6}\\
A(\triangle AHO) &= \frac{1}{2}\cdot\overline{AH}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

O cálculo da área do triângulo $\triangle AOR$ é dada por

$$
\begin{aligned}
A(AOR) &= A(ABH) - A(ABR) - A(AHO)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\\
&= \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a área da região pentagonal é denotada e definida por

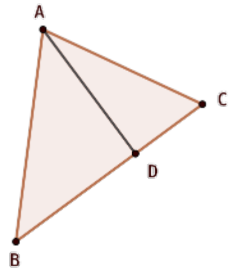
$$\begin{aligned} A(YKROT) &= A(ATL) - A(KLY) - A(AOR) \\ &= \frac{3}{10} - \frac{1}{30} - \frac{1}{6} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

No caso geral de um quadrado de lado $2l$, a razão de semelhança dos quadrados é de l, logo a razão de semelhança entre as áreas correspondentes é de l^2, e assim concluimos a nossa solução.

SOLUÇÃO ALTERNATIVA 2 : (Adriano)

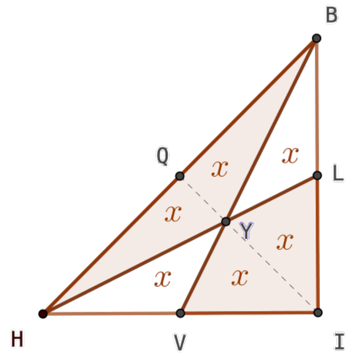
Observação: $[A_1A_2...A_n]$ denota a área do polígono $A_1A_2...A_n$

Fatos que ajudam:



Razão na qual uma ceviana divide a área de triângulo:
Se AD é uma ceviana do triângulo ABC, então:

$$\frac{[ABD]}{[ABC]} = \frac{BD}{BC} \quad \text{e} \quad \frac{[ADB]}{[ADC]} = \frac{DB}{DC}.$$



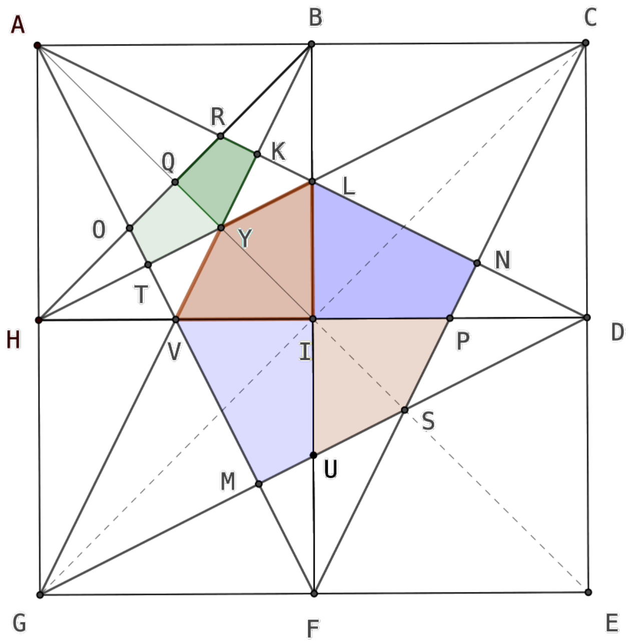
Em particular, se Y é o baricentro de um triângulo IBH, então:

(i) Y divide cada uma das medianas IQ, BV e HL na razão 2:1.

(ii) $[QYB] = x = \frac{1}{6}[IBH]$

(iii) $[VILY] = 2x = \frac{1}{3}[IBH]$

Usando a simetria do problema, considere a figura:



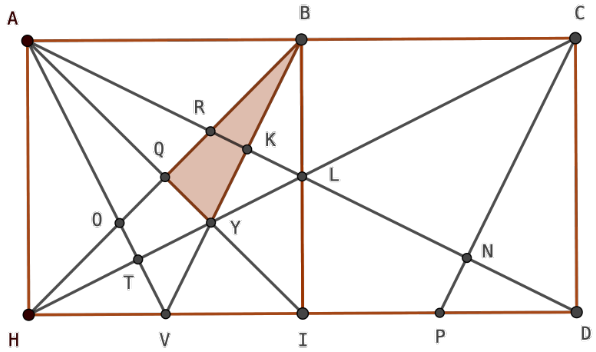
Podemos calcular as áreas desejadas da seguinte forma:

(1) $[YKROT] = 2 \cdot [QYKR]$.

(2) $[SNLYVM] = 2 \cdot [VPNLY] = 2 \cdot ([ILYV] + [IPNL])$.

($[ILYV] = [IUSP]$ e $[IPNL] = [IVMU]$ por simetria).

1. Área do pentágono:



Note que

$$[VBH] = \frac{1}{2}[IBH] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}l^2 = \frac{1}{4}l^2.$$

E, por (ii), temos

$$[QYB] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}l^2 = \frac{1}{12}l^2.$$

Por outro lado, considerando as semelhanças de triângulos e as observações sobre cevianas, segue-se:

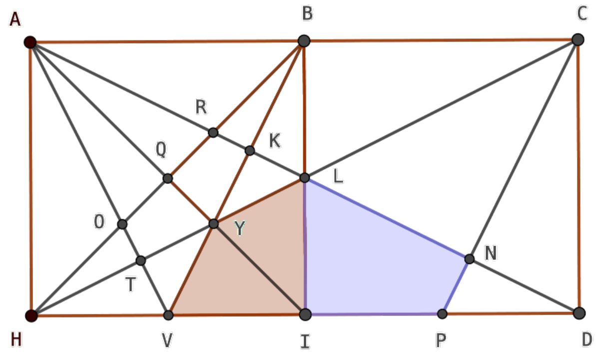
$$\begin{aligned} ABR \sim DHR \quad &\Rightarrow \quad \frac{RB}{RH} = \frac{AB}{DH} = \frac{1}{2} \Rightarrow RB = \frac{1}{2}RH = \frac{1}{3}HB \\ &\Rightarrow \quad [VBR] = \frac{1}{3}[VBH] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}l^2 \\ &\Rightarrow \quad [VBR] = \frac{1}{12}l^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ABK \sim DVK \quad &\Rightarrow \quad \frac{KB}{KV} = \frac{AB}{DV} = \frac{l}{3 \cdot l/2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{KB}{KB+KV} = \frac{2}{2+3} \\ &\Rightarrow \quad \frac{KB}{BV} = \frac{2}{5} \Rightarrow [RKB] = \frac{2}{5}[VBR] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{12}l^2 \\ &\Rightarrow \quad [RKB] = \frac{l^2}{30} \end{aligned}$$

Logo, de (1)

$$\begin{aligned} [OTYKR] \quad &= \quad 2 \cdot [QYKR] = 2 \cdot ([QYB] - [RKB]) = 2 \cdot \left(\frac{l^2}{12} - \frac{l^2}{30}\right) \\ &= \quad \left(\frac{l^2}{6} - \frac{l^2}{15}\right) = \frac{5l^2 - 2l^2}{30} = \frac{l^2}{10}. \end{aligned}$$

2. Área do hexágono:



Por (iii), temos

$$[VILY] = \frac{1}{3}[IBH] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}l^2 = \frac{1}{6}l^2.$$

Por outro lado,

$$[IDL] = [PDC] = \frac{1}{4}l^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} DNP \sim ANC \quad &\Rightarrow \quad \frac{NP}{NC} = \frac{PD}{CA} = \frac{1}{4} \Rightarrow NP = \frac{1}{5}PC \\ &\Rightarrow \quad [PDN] = \frac{1}{5}[PDC] = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}l^2 = \frac{1}{20}l^2. \\ &\Rightarrow \quad [IPNL] = [IDL] - [PDN] = \frac{1}{4}l^2 - \frac{1}{20}l^2 = \frac{1}{5}l^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} [SNLYVM] \quad &= \quad 2 \cdot [VPNLY] = 2.([VILY] + [IPNL]) \\ &\Rightarrow \quad [SNLYVM] = 2.\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)l^2 = \frac{11}{15}l^2. \end{aligned}$$