Olimpíada Pernambucana de Matemática 2023

Primeira Fase - Nível 3 (Ensino Médio)

CADERNO DE QUESTÕES E SOLUÇÕES

OPEMAT

REALIZAÇÃO:

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO — DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

APOIO:

Associação Olimpíada Brasileira de Matemática — stone

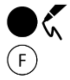
LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. A prova é composta de 12 questões de múltipla escolha: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 10 pontos, totalizando 120 pontos.

04. Para marcar a resposta, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul com o modelo:



05. A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.

06. Marcações duplas, em branco ou diferentes do exemplo acima serão desconsideradas.

07. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

08. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

09. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.

10. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

11. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.

12. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

13. Duração da prova: 2 horas e 30 minutos.

Nome: ____

Número da Identidade: ____________________ Órgão Expedidor: ____________________

Assinatura: ____

Q1. Para quantos valores de k, o número 12^{12} é o mínimo múltiplo comum de 6^6, 8^8 e k?

(A) 6

(B) 8

(C) 12

(D) 24

(E) 25

SOLUÇÃO: Temos que

$$12^{12} = 2^{24} \cdot 3^{12}, \quad 6^6 = 2^6 \cdot 3^6, \quad \text{e} \quad 8^8 = 2^{24}.$$

Pondo $k = 2^{k_1} 3^{k_2}$, vemos que como

$$\text{mmc}(2^6 \cdot 3^6, 2^{24}, k) = 2^{24} \cdot 3^{12},$$

devemos ter necessariamente $0 \leq k_1 \leq 24$ e $k_2 = 12$. Portanto, há $25 \cdot 1 = 25$ possibilidades para os valores de k. Assim, a alternativa correta é a letra (**E**).

Q2. Qual é a soma de todos os inteiros n tais que $n^2 + 2n + 2$ divide $n^3 + 4n^2 + 4n - 14$?

(A) 4

(B) 9

(C) -2

(D) -9

(E) -11

SOLUÇÃO: Pelo algoritmo da divisão longa para polinômios,

$$n^3 + 4n^2 + 4n - 14 = (n^2 + 2n + 2)(n + 2) + (-2n - 18).$$

Temos que se $(n^2 + 2n + 2)|(n^3 + 4n^2 + 4n - 14)$, então $(n^2 + 2n + 2)|(-2n - 18)$. Isto só ocorre se

$$-2n - 18 = 0,$$

ou seja, se $n = -9$, ou então se

$$|-2n - 18| \geq |n^2 + 2n + 2|.$$

Esta última desigualdade é verdadeira para $-4 \leq n \leq 4$. Testando os valores, vemos que $n = -4, -2, -1, 0, 1, 4$. Assim, a alternativa correta é a letra (**E**).

Q3. Quantos são os inteiros positivos n tais que $5^{n-1} + 7^{n-1}$ divide $5^n + 7^n$?

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

SOLUÇÃO: Observe que $5^{n-1}+7^{n-1}$ também divide 7 vezes si mesmo:

$$5^{n-1}+7^{n-1}|7(5^{n-1}+7^{n-1}).$$

Como

$$\begin{aligned}5^{n-1}+7^{n-1}|7(5^{n-1}+7^{n-1}) &\Longrightarrow 5^{n-1}+7^{n-1}|5\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^{n-1}+7\cdot 7^{n-1}\\ &\Longrightarrow 5^{n-1}+7^{n-1}|(5^n+2\cdot 5^{n-1}+7^n)-(5^n+7^n)\\ &\Longrightarrow 5^{n-1}+7^{n-1}|2\cdot 5^{n-1}.\end{aligned}$$

Porém, para $n>1$, temos que

$$5^{n-1}+7^{n-1}>2\cdot 5^{n-1}.$$

Daí, a divisão acima é impossível para $n>1$. É fácil ver, portanto, que $n=1$ é a única solução possível. Logo, a alternativa correta é a letra (**B**).

Q4. Há quatro canetas (preta, azul, vermelha e verde) e quatro tampas de canetas (azul, azul, vermelha e verde). As canetas e tampas distinguem-se apenas pelas suas cores. De quantos modos podemos colocar as quatro tampas nas quatro canetas se cada caneta deve receber apenas uma tampa e se as cores das tampas devem ser diferentes das cores das canetas?

(A) 2

(B) 4

(C) 8

(D) 12

(E) 24

SOLUÇÃO: Suponha que a tampa vermelha é colocada na caneta azul. Neste caso, há 2 modos de escolher a caneta que receberá a tampa verde (excluímos a caneta verde) e 1 modo de posicionar as tampas azuis na caneta restante.

Caso a tampa vermelha não seja colocada na caneta azul, há duas maneiras de escolher onde esta será colocada (verde ou preta). Feito esta escolha, as duas tampas azuis só poderão ser colocadas de um modo, pois devem ser colocadas nas canetas vermelha e na caneta não-azul que restou (verde ou preta). Por fim, a tampa verde deve ser colocada na caneta azul.

Pelo princípio aditivo, temos $2 + 2 = 4$ modos de colocar as quatro tampas nas quatro canetas. Portanto, a alternativa correta é a letra (**B**).

Q5. Certo dia, Débora encontrou a sua filha Alice mexendo em um armário que continha objetos de costura. Para evitar que sua filha se machuque, Débora instalou no armário um dispositivo de segurança que recebe como entrada um número de 5 algarismos (deste modo, números que comecem com o algarismo 0 estão excluídos) e o configurou para abrir somente se receber um palíndromo divisível por 4. Considerando que Alice fornece aleatoriamente números de 5 algarismos para o dispositivo, qual a probabilidade de que ela o abra?

Observação: Um número é dito um palíndromo se quando lido da direita para esquerda for idêntico ao número quando lido da esquerda para a direita. Assim, por exemplo, 14541 é um palíndromo, mas 13541 não é.

(A) 1/360

(B) 1/400

(C) 1/450

(D) 1/500

(E) 1/1000

SOLUÇÃO: Note que o primeiro algarismo não pode ser zero, do contrário teríamos um número de 4 algarismos. Desta forma, há $9 \cdot 10^4$ números de 5 algarismos que podem ser fornecidos ao dispositivo como entrada. Destes, os que são divisíveis por 4 devem ter seus últimos 2 algarismos iguais à $00, 04, 08, 12, \ldots, 96$ (25 possibilidades). Porém, como o número deve ser palíndromo, a escolha dos últimos 2 algarismos determina os 2 primeiros algarismos do mesmo. Assim, devemos excluir destas possibilidades, aquelas que terminam em 0 (5 possibilidades) , pois do contrário, o palíndromo resultante começaria com 0. Por fim, o algarismo central pode ser escolhido livremente dentre os 10 dígitos possíveis. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos $20 \cdot 10 = 2 \cdot 10^2$. Resulta que a probabilidade de Alice abrir o dispositivo de segurança é

$$P = \frac{2 \cdot 10^2}{9 \cdot 10^4} = \frac{1}{450}.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (**C**).

6. O π-raia deseja organizar seus horários de estudo durante a semana. Como ele frequenta a escola no turno da manhã, restam-lhe os turnos da tarde e da noite para estudar. Além disso, ele decidiu que não irá estudar durante os finais de semana e nem escolher turnos consecutivos para que lhe sobre algum tempo para descansar. De quantos modos o π-raia poderá escolher 4 turnos de estudo atendendo as condições acima?

(A) 16

(B) 24

(C) 35

(D) 3840

(E) 5040

SOLUÇÃO: Como há 5 dias na semana e 2 turnos possíveis para cada dia, temos 10 horários possíveis a serem escolhidos. Seja

$$S = \{h_1, \ldots, h_{10}\}$$

o conjunto dos horários possíveis. Agora, dado qualquer subconjunto $X \subseteq S$ de 4 elementos, defina $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ em que $a_i = 1$ se $h_i \in X$ e $a_i = 0$ se $h_i \notin X$. É fácil ver que existe uma correspondência biunívoca entre os subconjuntos $X \subseteq S$ de 4 elementos e as sequências σ definidas desta forma. Como desejamos escolher horários em turnos não consecutivos, consideraremos as sequências σ para as quais não existe $i \in \mathbb{Z}_+$ satisfazendo $a_i = a_{i+1} = 1$. Para contar tais sequências, basta notar que em uma sequência de 6 dígitos iguais a 0, há 7 espaços onde podem ser colocados 4 dígitos 1 conforme se vê abaixo:

$$\_0\_0\_0\_0\_0\_0\_$$

Como cada espaço deve conter no máximo um dígito 1, há $C_7^4 = 35$ modos de escolher onde serão posicionados os dígitos 1. Portanto, a alternativa correta é a letra (**C**).

7. Dois círculos ω_1 e ω_2 são tangentes externamente no ponto A. Sejam B e C os pontos de contato de ω_1 e ω_2 com uma reta tangente comum aos dois círculos, respectivamente. A reta tangente aos dois círculos que passa pelo ponto A, corta o segmento BC no ponto D. Determine a medida da corda AB, sabendo que $AC = 5$ e $AD = 4$.

(A) 5

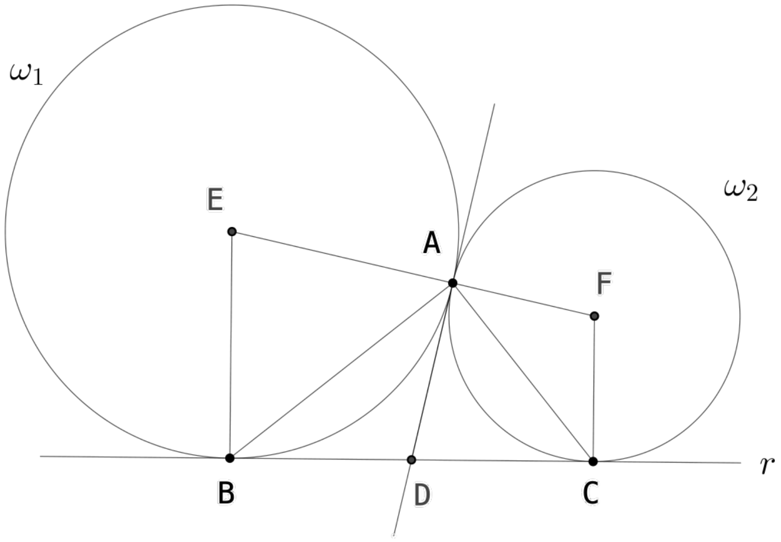
(B) 6

(C) $\sqrt{39}$

(D) $3\sqrt{5}$

(E) $4\sqrt{3}$

SOLUÇÃO:



Sabendo que DA e DB são segmentos tangentes a ω_1, temos $BD = AD = 4$. Do mesmo modo para ω_2, temos que $CD = AD = 4$. Logo, os pontos A, B e C pertencem ao círculo de centro D e diâmetro BC. Sendo assim, o triângulo ABC é retângulo em A e, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \;\Rightarrow\; AB^2 = 8^2 - 5^2 = \Rightarrow\; AB = \sqrt{39}$$

8. O cadastro de pessoa física (CPF) é um documento de identificação usado pela receita federal que consiste de onze dígitos sendo os nove primeiros fornecidos pela receita federal e os dois últimos, chamados dígitos verificadores, calculados da seguinte forma: se $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7d_8d_9$ são os nove primeiros dígitos do CPF fornecido, então calculamos

$$A = 10d_1 + 9d_2 + 8d_3 + 7d_4 + 6d_5 + 5d_6 + 4d_7 + 3d_8 + 2d_9,$$

e calculamos r, onde r é o resto da divisão de A por 11. Se o resto for 0 ou 1 então o décimo dígito d_{10} será 0. Caso contrário d_{10} será $11 - r$. Para calcular o décimo primeiro dígito, calculamos

$$B = 10d_2 + 9d_3 + 8d_4 + 7d_5 + 6d_6 + 5d_7 + 4d_8 + 3d_9 + 2d_{10},$$

e calculamos R, onde R é o resto da divisão de B por 11. Se $R = 0$ ou $R = 1$ então $d_{11} = 0$. Caso contrário, $d_{11} = 11 - R$. Se uma pessoa tem os nove primeiros dígitos de seu CPF dados por 299792458, os dígitos d_{10} e d_{11} são respectivamente:

(A) 1 e 8

(B) 0 e 7

(C) 2 e 6

(D) 0 e 8

(E) 3 e 5

SOLUÇÃO: Substituindo os valores em A obtemos $A = 342$ e $r = 1$. Logo $d_{10} = 0$. Calculando B obtemos $B = 366$ e $R = 3$. Logo $d_{11} = 8$.

9. QUESTÃO ANULADAO iodo 131 é um isótopo radioativo do iodo que é utilizado na medicina no tratamento de hipertireoidismo e alguns tipos de câncer. Sua meia-vida é de 8,02 dias. Isto significa que qualquer quantidade de iodo 131 terá sua massa reduzida à metade após 8,02 dias. A massa inicial de uma amostra é de $1g$. Qual a massa remanescente após 201 dias?

(A) 2^{-10}

(B) 2^{-40}

(C) 2^{-50}

(D) 2^{-20}

(E) 2^{-100}

SOLUÇÃO: No instante t, $m(t) = 2^{-\frac{t}{8,02}}$. Logo, $m(401) = 2^{-\frac{401}{8,02}} = 2^{-50}$

10. QUESTÃO ANULADA Atualmente os televisores são vendidos pelo comércio usando uma medida em polegadas. Tal medida se refere ao comprimento da diagonal da tela, que em geral tem a forma retangular. Sabendo que um televisor de 55 polegadas têm dimensões $68,5cm \times 122cm$, mantendo as proporções, as dimensões em centímetros de um televisor de 65 polegadas são aproximadamente (considere uma polegada = 2,54 cm)?

(A) $143,18$ e $75,50$

(B) $144,18$ e $76,23$

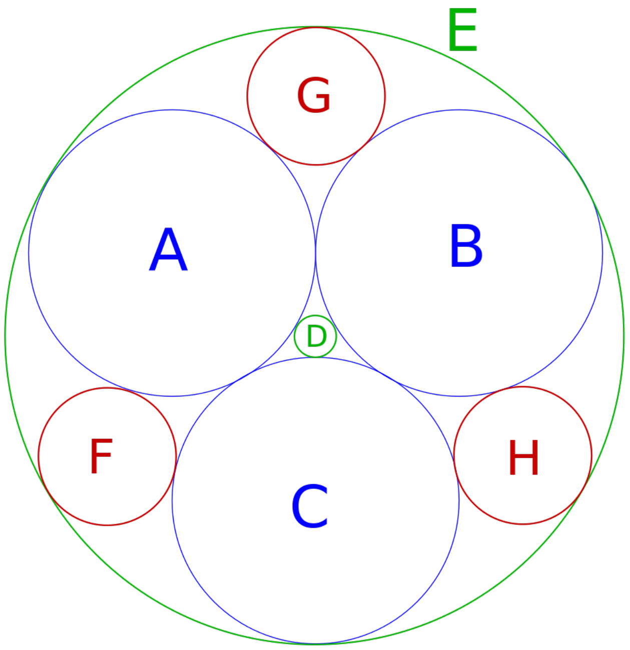
(C) $146,20$ e $74,30$

(D) $140,18$ e $72,23$

(E) $145,20$ e $73,40$

SOLUÇÃO: sendo x e y as medidas do maior e menor lado respectivamente, devemos ter $\dfrac{x}{122} = \dfrac{y}{64,5} = \dfrac{65.2,54}{55.2,54} = \dfrac{13}{11}$. Assim, temos $x = \dfrac{13.122}{11} = 144,18$ e $x = \dfrac{13.64,5}{11} = 76,23$.

11. (Círculos de Apolônio) Considere três circunferências A, B e C todas com raio r mutuamente tangentes. O matemático grego Apolônio de Perga que viveu por volta de III a.C, descobriu que existem duas circunferências D e E , onde o raio de E é maior que o raio de D, tangentes as três anteriores (na verdade Apolônio mostrou que isto é verdade mesmo se os raios de A,B e C são distintos). As circunferências D e E são chamadas círculos de Apolônio. Se consideramos agora as circunferências A, B e E, elas próprias possuem seus círculos de Apolônio que são G e C conforme a figura. Fazendo o mesmo para as ternas A, C, E e C, B, E, encontramos as circunferências F e H. Esse processo recursivo leva a um fractal chamado Tamiz de Apolônio. Com base na figura, o raio de D em termos de r é



(A) $2r$

(B) $2r\sqrt{3}$

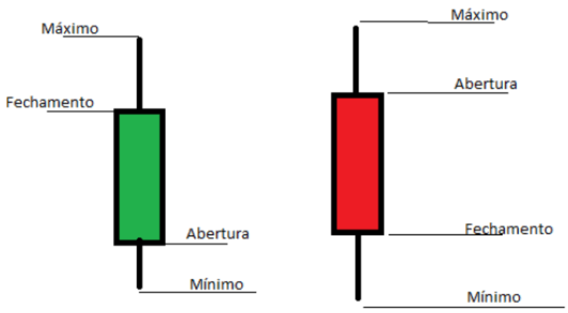
(C) $r(\frac{2\sqrt{3}-3}{3})$

(D) $\frac{r^2\sqrt{2}}{2}$

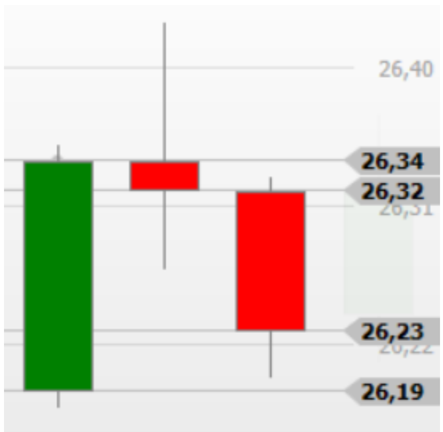
(E) $2r(\frac{2\sqrt{3}-3}{3})$

SOLUÇÃO: Os centros de A, B e C formam um triângulo equilátero de lado $2r$ como o centro de D coincide com o centro de E que coincide com o baricentro do triangulo δABC temos que a distância do centro de E para o centro de B é $\frac{2}{3}(\frac{2r\sqrt{3}}{2})$. Logo o raio de E, $R_E = \frac{2r\sqrt{3}}{3} + r$. Assim, o raio de D, $R_D = R_E - 2R = \frac{2r\sqrt{3}}{3} - r$ $= r(\frac{2\sqrt{3}-3}{3})$. Portanto, a alternativa correta é a letra (C).

12. "Candlestick" ou simplesmente Candle é um gráfico de indicação de preço criado por Munehisa Homma, que foi um comerciante de arroz japonês. Ele representou os pontos importantes do preço do arroz como máxima, mínima, abertura e fechamento em um determinado período e os representou conforme os gráficos abaixo.



Os candles abaixo, mostram os preços das ações da Petrobrás no dia 23/05/2023 onde as aberturas se iniciam às 12:00, 12:30 e 13:00 horas, respectivamente. A média aritmética dos fechamentos nos períodos indicados é aproximadamente:



(A) $26,28$
(B) $26,29$
(C) $26,30$
(D) $26,31$
(E) $26,32$

SOLUÇÃO: Olhando para a figura observamos que a média aritmética é $26,30$.

Resposta: Letra c)