REALIZAÇÃO:

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO — DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

APOIO:

Associação Olímpiada Brasileira de Matemática — stone

Olimpíada Pernambucana de Matemática 2023

Segunda Fase - Nível 2 (8º e 9º anos)

OPEMAT

CADERNO DE QUESTÕES E SOLUÇÕES

LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. A prova é composta de 5 questões dissertativas: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos.

04. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

05. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

06. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

07. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.

08. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

09. Duração da prova: 4 horas.

NOME: ____

NÚMERO DA IDENTIDADE: ____________________ ÓRGÃO EXPEDIDOR: ____________________

ASSINATURA: ____

Q1. Deseja-se construir um tanque para armazenar combustível, com formato de paralelepípedo retangular reto, com largura L, comprimento C e profundidade P. No projeto foi estabelecido que a soma $P+L+C$ deve ser igual a 113 metros e a profundidade P deve ser no mínimo 57 metros. Qual é o maior valor possível para o volume, em metros cúbicos, deste tanque de combustível?

SOLUÇÃO: Como 57 é maior que a metade de 113 temos que $P-57 \geq 0$ e $C-57 \leq 0$. Logo

$$(P-57)(C-57) \leq 0.$$

Desenvolvendo esse produto, temos que

$$PC \leq 57(P+C-57).$$

Multiplicando a inequação acima por L, segue que

$$LPC \leq 57L(P+C-57).$$

Utilizando a desigualdade MA-MG, obtemos

$$LPC \leq 57L(P+C-57) \leq 57\frac{(L+P+C-57)^2}{4} = 57 \cdot 28^2.$$

Precisamos mostrar que a cota é atingida. Para simplificar vamos procurar valores inteiros para P, L e C que atingem a cota.

Tem-se: $LPC \leq 57 \cdot 28^2$. Isto, junto com $P \geq 57$ e $2 \cdot 57 = 154 \geq 113 = P+L+C$, fornece $P = 57$. Assim, $L+C = 56$ e $LC \leq 28^2$. Na verdade, $LC = 28^2$, pois pela desigualdade MA-MG, temos

$$28 = \frac{L+C}{2} \leq \sqrt{LC} \leq 28$$

Agora, pode-se justificar $L = C = 28$ em dois passos:

1) Usando o TFA, na decomposição por primos de $LC = 2^4 \cdot 7^2$, uma solução é $L = C = 28$. Qualquer outra solução não fornece $L + C = 56$
2) Tem-se: $28^2 = LC = L(56-L) = 56L - L^2 \Rightarrow L^2 - 2 \cdot 28L + 28^2 = 0 \Rightarrow L = 28$ e $C = 28$.

Desse modo, o maior volume do tanque ocorre quando $P = 57$, $L = 28$ e $C = 28$, o que nos dá $V = 44688\ m^3$.

SOLUÇÃO ALTERNATIVA

Desde que $P \geq 57$ e $P+L+C = 113$ então, em particular, $L - 57 < 0$. Consequentemente,

$$(P-57)(L-57) \leq 0 \implies PL - 57P - 57L + 57^2 \leq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
PL &\leq 57P + 57L - 57^2 \implies \\
PLC &\leq 57PC + 57LC - 57^2C \implies \\
PLC &\leq 57C(P+L-57) \implies \\
PLC &\leq 57C[(113-C)-57] \implies \\
PLC &\leq 57C(56-C).
\end{aligned}$$

Note que o valor máximo da função $C \longmapsto 57C(56-C)$ ocorre quando $C = 28$.

Além disso,

$$CPL \leq 57 \cdot 28(56-28) = 57 \cdot 28^2.$$

Para ter o volume máximo, quando $C = 28$, é necessário e suficiente que ocorram as igualdades nas desigualdades acima até chegar na primeira desigualdade, isto é,

$$(P-57)(L-57) = 0 \implies P = 57,$$

pois $L - 57 < 0$.

Como $P + L + C = 113$, $C = 28$ e $P = 57$, então $L = 28$.

Portanto, $C = L = 28$ e $P = 57$ com volume máximo dado por $28^2 \cdot 57 = 44.688$ metros cúbicos.

Q2. Alan tem uma mania esquisita de formar sequências de números naturais. Para formar uma sequência, ele começa escolhendo o primeiro termo e o termo seguinte é obtido somando-se os dígitos do termo anterior. Por exemplo:

$$967988 \to 47 \to 11 \to 2$$

(A) Mostre que, não importa de qual número Alan comece, sua mania sempre o leva à um número de apenas um dígito.

(B) Encontre a quantidade de números entre 1 e 1.000.000 que chegam no número 1.

SOLUÇÃO: (A) Sejam x um número natural com $n+1$ dígitos ($n \geq 2$) e S a soma dos dígitos de x, isto é,

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$$

e

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} x &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &> 9 + 9 + 9 + 9 + ... + 9 \\ &\geq a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n = S. \end{aligned}$$

Portanto, $x > S$, o que mostra que cada passo o número sempre decresce. Logo, em algum momento será um número de um dígito.

(B) O critério de divisibilidade por 3 diz que se um número é divísivel por 3 a soma dos seus dígitos também é, o mesmo critério também é verdade na divisão por 9. Uma versão ainda mais completa desses critérios diz mais do que isso: um número e a soma dos seus dígitos deixam o mesmo resto na divisão por 3 ou por 9. Uma prova rápida desse fato:

$$\begin{aligned} x - S &= (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0) - (a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n) \\ &= a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \cdots + a_1 \cdot (10 - 1) \end{aligned}$$

Como $9 \mid 10^n - 1$ para todo n natural, então $9 \mid x - S$ qualquer que seja o número x e sua soma dos dígitos S.

Usando esse fato, descobrimos que os números que chegam no 1 são exatamente os que deixam resto 1 na dívisão por 9. Então para descobrir quantos números chegam no 1, precisamos descobrir quantos números entre 1 e 1000000 deixam resto 1 na divisão por 9. A quantidade é igual a

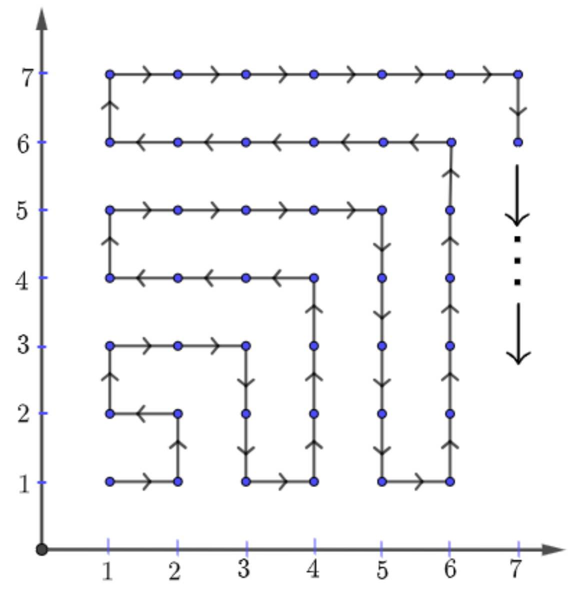
$$\frac{999999}{9} + 1 = 111112$$

.

Q3. Vamos estabelecer uma sequência de pares ordenados da forma (n,m) onde n e m são números naturais. Esta sequência é construída marcando no primeiro quadrante do plano cartesiano os pontos da forma (n,m) onde $n,m \in \mathbb{N}$ (aqui vamos considerar que o "zero" não é um número natural). A sequência é construída "seguindo a seta" conforme a figura abaixo. Vamos indicar por P_n o n-ésimo ponto dessa sequência. Iniciamos esta sequência definindo $P_1 = (1,1)$ e seguindo a seta conforme a figura abaixo, teremos:

$$P_2 = (2,1), \quad P_3 = (2,2), \quad P_4 = (1,2), \quad P_5 = (1,3), \quad P_6 = (2,3), \; \cdots$$

e assim sucessivamente.



Responda os itens abaixo, considerando a sequência estabelecida:

(A) Determine P_7 a P_{12}.

(B) Determine os números naturais n e m tais que $P_n = (6,6)$ e $P_m = (100,100)$.

(C) Determine P_{2023}.

SOLUÇÃO:

(a) Usando a definição da contagem, teremos:

$$P_7 = (3,3),\; P_8 = (3,2),\; P_9 = (3,1),\; P_{10} = (4,1),\; P_{11} = (4,2),\; P_{12} = (4,3).$$

(b) No quadrado $[0,6] \times [0,6]$ temos 6^2 pontos, sendo $P_{6^2} = (1,6)$ o último desses pontos segundo a contagem. Retrocedendo, segundo a seta, 5 lugares desses 6^2 pontos, obteremos $P_{6^2-5} = (6,6)$. Logo, o valor de n que satizfaz $P_n = (6,6)$, é $n = 6^2 - 5 = 31$.

O que acontece no quadrado $[0,6] \times [0,6]$ é um padrão para esta contagem, pois no quadrado $[0,2] \times [0,2]$ temos 4 pontos com $P_4 = P_{2^2} = (1,2)$ e $P_{2^2-1} = (2,2)$. No quadrado $[0,3] \times [0,3]$ temos 9 pontos com $P_9 = P_{3^2} = (3,1)$ e $P_{3^2-2} = (3,3)$. Portanto, em geral teremos $P_{n^2-(n-1)} = (n,n)$. Assim, o valor de n que satisfaz $P_n = (100,100)$ é $n = 100^2 - 99 = 9901$.

(c) Note que $2023 < 45^2 = 2025$. Logo, o ponto corresponde a P_{2023} está dentro do quadrado $[0,45] \times [0,45]$. Pela definição da contagem, temos $P_{2^2} = (1,2)$, $P_{3^2} = (3,1)$, $P_{4^2} = (1,4)$. Deduzimos aqui outro padrão para a contagem:

$$\text{se } n \text{ é par, } P_{n^2} = (1,n) \text{ e se } n \text{ é ímpar, } P_{n^2} = (n,1).$$

Sendo $n = 45$ ímpar e $2023 = 45^2 - 2$, teremos $P_{45^2} = (45,1)$ e, contando dois lugares a menos "seguindo a seta", $P_{2023} = (45,3)$.

Outras soluções para (b) e (c)

(b) Pode-se estabelecer um padrão para obterse os pontos que estão sobre a diagonal (x, x), temos

$$P_1 = (1,1) \overset{+2}{\to} P_3 = (2,2) \overset{+2\cdot 2}{\to} P_7 = (3,3) \overset{+2\cdot 3}{\to} P_{13} = (4,4), \cdots$$

Onde, acima da seta estão indicados a quantidade de pontos para chegar ao pontos seguinte. Assim, os subindices dos pontos de coordenada (n, n) seguem uma sequência, a saber,

$$1,\ 1+2,\ 1+2+4,\ 1+2+4+6,\ \cdots,\ 1+2(1)+2(2)+\cdots+2(n-1)$$

Portanto, o indice n que satisfaz $P_n = (6,6)$ é $n = 1+2(1)+2(2)+2(3)+2(4)+2(5) = 1+2+4+6+8+10 = 31$. E o indice m que satisfaz $P_m = (100, 100)$ é

$$m = 1 + 2(1+2+3+\cdots+99) = 1 + 2\frac{100 \cdot 99}{2}1 + 9900 = 9901$$

OBSERVAÇÃO:

$$1+2+6+\cdots+2(n-1) = 1 + 2\left(1+2+3+\cdots+(n-1)\right) = 1 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = 1 + n^2 - n$$

(c) Pela parte (b), temos que o ponto $P_k = (n, n)$ é obtido para $k = 1+2+6+\cdots+2(n-1) = n^2 - n + 1$. Agora:

- Se n é par a seta vai para a esquerda até o ponto $(1, n)$
- Se n é impar a seta desce até o ponto $(n, 1)$

Temos $2023 = 45^2 - 2$ e $45^2 - 45 + 1 = 1981$. Assim, $P_{1895} = (45, 45)$ e como $n = 45$ é impar, devemos descer 2023-1981=42 lugares na segunda coordenada do par $(45, 45)$. Isto, fornece $P_{2023} = (45, 3)$.

Q4. João e Pedro entram numa sala de aula e encontram o número 111 escrito na lousa. Então, eles decidem jogar um jogo onde cada um deles escreve, um após o outro, um número natural na lousa partindo do número 111 que já está escrito, de acordo com as seguintes regras: deve começar com o dígito que o anterior terminou, deve ser maior que o anterior, e deve ser menor que 1000.

Perde o jogo quem jogar um número depois do qual não é possível prosseguir. Exemplo: Se num jogo os números jogados são 113 e 333, 356 e 672, então o segundo jogador perdee o jogo, pois, não existe número menor que 1000 e maior que 672 que comece m 2.

Mostre que existe uma estratégia em que o primeiro jogador sempre vença.

SOLUÇÃO:

Algumas informações que norteiam as jogadas:

1. O jogador que jogar 999 perde, uma vez que esse número encerra o jogo. Assim, uma estratégia seria forçar o outro jogador a jogar tal número;
2. Quem jogar 989 ganha, pois, o outro jogador teria que jogar um número de 3 dígitos que comece em 9 e que seja maior do que 989, ou seja, um dos números 990, 991, 992, 993,994, 995, 997,998 ou 999. Note que em qualquer um desses caso ele perde.
3. Se um jogador jogar um número que termine em 9, a não ser que o número seja 989, ele perde. Isso porque, nesse caso, ou ele encerra o jogo ou o outro pode jogar 989.

Portanto a estratégia para que o primeiro jogador vença é:

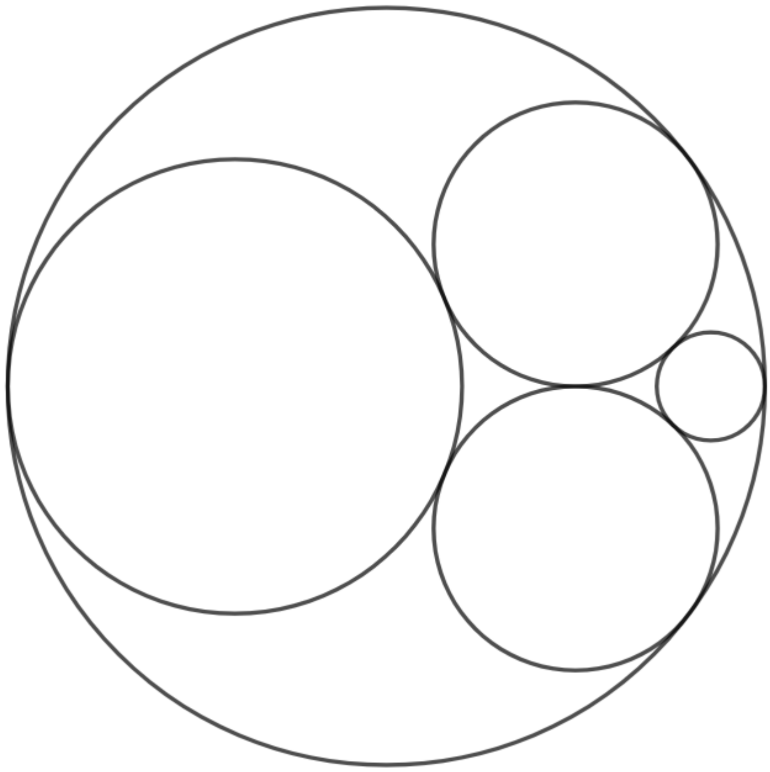
- O primeiro jogador começa jogando 191;
- Se o segundo jogador jogar um número que não termine em 9, então o primeiro jogador pode jogar um número da forma $n9n$ com $n > 1$. Do contrário ele joga 989.

De fato, essa estratégia leva a vitória, uma vez que se o número escrito no quadro é da forma $n9n$, o próximo tem que ser da forma $n9(n+i)$, onde $i > 0$. Desse modo, o primeiro jogador pode sempre jogar da forma descrita na estratégia e o segundo vai ter que jogar em algum momento um número que termine em 9 perdendo assim o jogo.

Q5. Chico aprendeu com seu pai Renato, que a curvatura de uma circunferência é definida por $K = \dfrac{1}{R}$, onde R é o raio da circunferência e que por este motivo, não se percebe a curvatura da terra olhando para o horizonte em uma praia, pois seu raio é de aproximadamente 6371 km. Após uma aula sobre grandezas e medidas, Chico resolveu criar a unidade de medida "Pm" a partir da medida do pé de sua mãe Taciana. Esta pediu a Chico para pegar um par de argolas em seu porta joias que possui o formato de cilindro reto de base circular. Ao retirar a tampa do porta joias, Chico percebeu que em seu fundo tinha uma argola em formato de circunferência com raio $\dfrac{1}{5}\,Pm$, um par de argolas também em formato de circunferência com raio $\dfrac{1}{8}\,Pm$ e um anel, de forma que as argolas de raio $\dfrac{1}{8}\,Pm$ eram tangentes entre si e tangentes a argola de raio $\dfrac{1}{5}\,Pm$, o anel era tangente as duas argolas menores e a parede lateral do porta joias era tangente a todas as argolas e ao anel. Considerando que todas as argolas e o anel estão apoiados no mesmo plano, Chico então percebeu que apenas com estas informações, era possível determinar a curvatura da circunferência da base do cilindro e a curvatura do anel. Quais os valores encontrados por Chico?

SOLUÇÃO:

A situação é representada pela figura abaixo.



Seja C_M a circunferência maior que define a base do porta jóias, R seu raio e P o seu centro. Seja C_5 a circunferência que define a argola de raio $\dfrac{1}{5}$ com centro A, C_8^1 a circunferência localizada acima da reta AP com centro B, C_8^2 a circunferência localizada abaixo da reta AP e T o ponto de tangência entre C_8^1 e C_8^2. Agora observe que o triangulo PBT é retângulo. Logo, $PB = R - \dfrac{1}{8}$ e $BT = \dfrac{1}{8}$. Assim, pelo teorema de Pitágoras,

$$PT = \sqrt{\left(R - \frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R}{4}}.$$

Agora observe que o triangulo ABT também é retângulo. Logo como $AB = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{8}$, $AT = AP + PT = R - \dfrac{1}{5} + \sqrt{R^2 - \dfrac{R}{4}}$ e $BT = \dfrac{1}{8}$, temos

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right)^2=\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(R-\frac{1}{5}+\sqrt{R^2-\frac{R}{4}}\right)^2 \Longrightarrow \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)=\left(R-\frac{1}{5}+\sqrt{R^2-\frac{R}{4}}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \frac{9}{100}=\left(R-\frac{1}{5}+\sqrt{R^2-\frac{R}{4}}\right)^2 \Longrightarrow \frac{3}{10}=\left(R-\frac{1}{5}+\sqrt{R^2-\frac{R}{4}}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}-R=\sqrt{R^2-\frac{R}{4}} \Longrightarrow \frac{1}{4}-R=-\frac{R}{4} \Longrightarrow R=\frac{1}{3}.$$

e consequentemente

$$PT=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{4}}=\sqrt{\frac{1}{36}}=\frac{1}{6}.$$

Agora seja C_m a circunferência que define o anel, G o seu centro e r o seu raio. Observe que o triângulo BTG também é retângulo, $BG=\frac{1}{8}+r$, $BT=\frac{1}{8}$ e $TG=\frac{1}{6}-r$, pois, $R=\frac{1}{3}$, $PT=\frac{1}{6}$ e $PT+TG+r=R$. Assim, novamente pelo teorema de pitágoras,

$$\left(\frac{1}{8}+r\right)^2=\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{6}-r\right)^2 \Longrightarrow \frac{r}{4}+\frac{r}{3}=\frac{1}{36} \Longrightarrow r=\frac{1}{21}$$

.

Desta forma, a curvatura de C_M é $k_M=3$ e a curvatura de C_m é $k_m=21$