REALIZAÇÃO:

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

APOIO:

Associação Olimpíada Brasileira de Matemática stone

OPEMAT

Olimpíada Pernambucana de Matemática 2023

Primeira Fase - Nível 2 (8º e 9º anos)

CADERNO DE QUESTÕES E SOLUÇÕES

LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. A prova é composta de 12 questões de múltipla escolha: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 10 pontos, totalizando 120 pontos.

04. Para marcar a resposta, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul com o modelo:

F

05. A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.

06. Marcações duplas, em branco ou diferentes do exemplo acima serão desconsideradas.

07. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

08. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

09. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.

10. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

11. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.

12. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

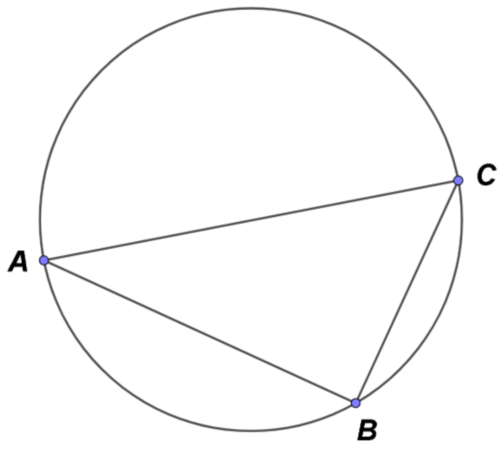
13. Duração da prova: 2 horas e 30 minutos.

NOME: ______________________________

NÚMERO DA IDENTIDADE: ______________ ÓRGÃO EXPEDIDOR: ______________

ASSINATURA: ______________________________

Q1. Considere o triângulo ABC inscrito numa circunferência cujo diâmetro é o segmento AC, de acordo com a figura abaixo:



Assuma que $AC = 1$, $AB = a$ e $BC = b$ de maneira que $ab = \frac{1}{3}$. O valor de $a^4 + b^4$ é:

(A) $\frac{1}{9}$

(B) $\frac{3}{9}$

(C) $\frac{5}{9}$

(D) $\frac{7}{9}$

(E) $\frac{9}{9}$

SOLUÇÃO: Como um dos lados do triângulo $\triangle ABC$ inscrito é o diâmetro da circunferência, então tal triângulo é retângulo, cuja hipotenusa vale $AC = 1$ e os catetos medem $AB = a$ e $BC = b$. Pelo Teorema de Pitágoras, vale a seguinte relação:

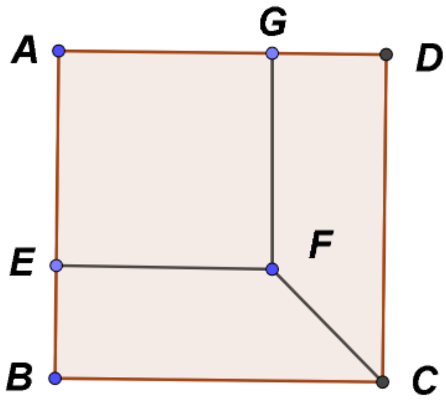
$$a^2 + b^2 = 1.$$

Sabendo que $ab = \dfrac{1}{3}$ e usando as seguintes manipulações algébricas, temos

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2 \\ &= 1^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

Q2. Considere o quadrado $ABCD$ cujo lado mede $3cm$. Construa um novo quadrado $AEFG$ tal que $EB = 1cm$, de acordo com a figura abaixo:



A área do trapézio $CDGF$ em cm^2 é:

(A) 1

(B) $1,5$

(C) 2

(D) $2,5$

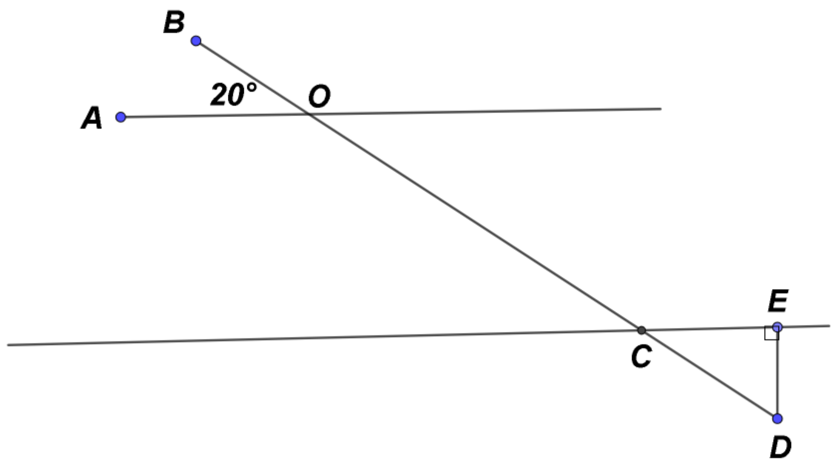
(E) 3

SOLUÇÃO: De acordo com a figura, basta observar que $CD = 3$, $FG = 3 - 1 = 2$ e $GD = 1$. Usando a fórmula clássica da área do trapézio, concluimos que a área do trapézio em cm^2 a qual denotaremos por A é dada por:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{(CD + FG) \cdot DG}{2} \\
&= \frac{(3 + 2) \cdot 1}{2} \\
&= \frac{5}{2} \\
&= 2,5.
\end{aligned}
$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

Q3. Os segmentos AO e CE são paralelos, de acordo com a figura abaixo:



Assumindo que o ângulo $A\hat{O}B = 20°$ e o ângulo $C\hat{E}D = 90°$, podemos concluir que o ângulo $C\hat{D}E$ vale:

(A) 40°

(B) 50°

(C) 60°

(D) 65°

(E) 70°

SOLUÇÃO: Como os segmentos AO e CE são paralelos, então pela relação dos ângulos alternos externos, concluimos que $AOB = DCE = 20°$. Desde que o triângulo $\triangle CDE$ é retângulo em E e sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale $180°$, então segue que o ângulo CDE vale $70°$.

Portanto, a alternativa correta é a letra (E).

Q4. QUESTÃO ANULADA Considere a equação

$$x^8 + 2x^6 + 6x^4 + 2x^2 - 15 = 0.$$

Então o número de soluções reais e distintas da equação acima é:

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 4

(E) 8

Q5. Considere a função $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = (x - n)(x - n + 1).$$

O valor mínimo da função f_n é:

(A) $-\frac{1}{4}$

(B) 0

(C) 1

(D) $1 - n$

(E) n

SOLUÇÃO: Observe que

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= (x-n)(x-n+1) \\
&= x^2-(2n-1)x+n^2-n \\
&= \left[x-\frac{2n-1}{2}\right]^2-\left[\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2-n^2+n\right] \\
&= \left[x-\frac{2n-1}{2}\right]^2-\left[\frac{4n^2-4n+1-4n^2+4n}{4}\right] \\
&= \left[x-\frac{2n-1}{2}\right]^2-\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

O que mostra que o mínimo da função f_n vale $-\dfrac{1}{4}$ e ocorre quando $x=\dfrac{2n-1}{2}$.

Portanto, a alternativa correta é a letra (A).

6. Seja x o valor da expressão numérica

$$\frac{\sqrt[3]{0,125} \cdot (0,5)^{-3} \cdot 4^{16}}{4^{17}}.$$

Qual o valor de x?

(A) $0,5$

(B) 1

(C) 2

(D) 4

(E) 8

SOLUÇÃO: Lembrando que

$$x \quad = \quad \frac{\sqrt[3]{0,125}\cdot(0,5)^{-3}\cdot 4^{16}}{4^{17}} = \frac{\sqrt[3]{2^{-3}}\cdot(2^{-1})^{-3}\cdot 2^{32}}{2^{34}} = 1.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (B).

7. Os números naturais m, n, p, q, r e s são formados por 3 algarismos não nulos. Assumindo que estes números são distintos e formados pelos mesmos algarismos, então $m + n + p + q + r + s$ é um múltiplo de:

(A) 10

(B) 100

(C) 110

(D) 200

(E) 222

SOLUÇÃO: Considere a, b e c os digitos distintos dos números m, n, p, q, r e s. Logo,

$$\begin{aligned}
m &= abc = 100a + 10b + c \\
n &= bac = 100b + 10a + c \\
p &= acb = 100a + 10c + b \\
q &= bca = 100b + 10c + a \\
r &= cab = 100c + 10a + b \\
s &= cba = 100c + 10b + a.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$m + n + p + q + r + s = 222(a + b + c),$$

o que mostra que a soma é múltiplo de 222.

Portanto, a alternativa correta é a letra (E).

8. Seja n um número inteiro positivo. Defina o número n^* por

$$n^* = (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Por exemplo,

$$6^* = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Dentre as alternativas abaixo, podemos concluir que o número de divisores primos distintos do número 21^* é:

(A) 2

(B) 8

(C) 10

(D) 11

(E) 21

SOLUÇÃO: Observe que

$$
\begin{aligned}
21^* &= 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
&= (2^2 \cdot 5) \cdot 19 \cdot (2 \cdot 3^2) \cdot 17 \cdot (2^4) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 7) \cdot 13 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 3^3 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \\
&= 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.
\end{aligned}
$$

Portanto, o número de divisores distintos maiores do que 1 do número 21^* é 8, o que mostra que a alternativa correta é a letra (B).

9. QUESTÃO ANULADADizemos que um número positivo de três dígitos não nulos é dito **médio** se o seu digito central é o valor médio dos seus dígitos extremos. Por exemplo, 543 é um número médio pois $4 = \frac{5+3}{2}$. Podemos afirmar que a quantidade de números médios é:

(A) 3

(B) 4

(C) 9

(D) 10

(E) 81

10. QUESTÃO ANULADA

Quantos números inteiros entre 99 e 1000 tem a propriedade de que quaisquer dois dígitos adjacentes diferem de uma unidade? Por exemplo, 123, 789, 654.

(A) 14

(B) 21

(C) 28

(D) 35

(E) 42

11. QUESTÃO ANULADADefina

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

O valor de

$$\sum_{n=1}^{10000} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

é:

(A) $\dfrac{1}{100}$

(B) $\dfrac{10}{100}$

(C) $\dfrac{99}{100}$

(D) $\dfrac{100}{100}$

(E) 100

12. Numa construção geométrica, os pontos P_1, P_2, P_3,...,P_{11} são distintos e colineares. Sabendo que entre dois pontos P_i e P_{i+1} existem exatamente 3^i retas perpendiculares ao segmento P_iP_{i+1}. Podemos concluir que a quantidade de retas perpendiculares ao segmento P_1P_{11} é:

(A) 3^{11}

(B) $3^{11} - 1$

(C) $3^{11} - 3$

(D) $\dfrac{3^{11} - 3}{2}$

(E) $\dfrac{3^{11} + 3}{2}$

SOLUÇÃO: A quantidade de retas perpendiculares ao segmento P_1P_{11} vale

$$S = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{10}.$$

Multiplicando a relação acima por 3, obtemos

$$3S = 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{10} + 3^{11}$$

Subtraindo as relações acima, concluimos que

$$3S - S = -3 + 3^{11}.$$

Logo,

$$S = \frac{3^{11} - 3}{2}.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (D).