OPEMAT

# Olimpíada Pernambucana de Matemática 2023

## Segunda Fase - Nível 1 (6º e 7º anos)

## CADERNO DE QUESTÕES E SOLUÇÕES

REALIZAÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

APOIO: Associação Olímpiada Brasileira de Matemática – stone

**LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!**

**01.** Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

**02.** Preencha os dados pessoais.

**03.** A prova é composta de 5 questões dissertativas: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos.

**04.** Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

**05.** Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

**06.** Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

**07.** As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.

**08.** Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

**09.** Duração da prova: 4 horas.

NOME: ____________________

NÚMERO DA IDENTIDADE: ____________ ÓRGÃO EXPEDIDOR: ____________

ASSINATURA: ____________________

**Q1.** Um número natural $n$ é dito quase-primo se existe um único número natural $k$, com $1 < k < n$, tal que $k$ divide $n$. Por exemplo, 4 é um número quase-primo pois 2 é o único natural entre 1 e 4 que divide 4, mas 12 não é um número quase-primo, visto que 2 e 3 dividem 12. Determine a quantidade de números quase-primos entre 1 e 400.

**SOLUÇÃO:** Suponha que $n$ é um número quase-primo. Então, o número natural $k$ que divide $n$ tal que $1 < k < n$ é único com essa propriedade.

**Afirmação 1:** $k$ é um número primo.

Se $k$ não fosse primo então existiria algum número natural $q$ com $1 < q < k$ tal que $q$ divide $k$, isto é, $q$ também dividiria $n$ tal que $1 < q < n$, o que contradiz o fato de $n$ ser um número quase-primo.

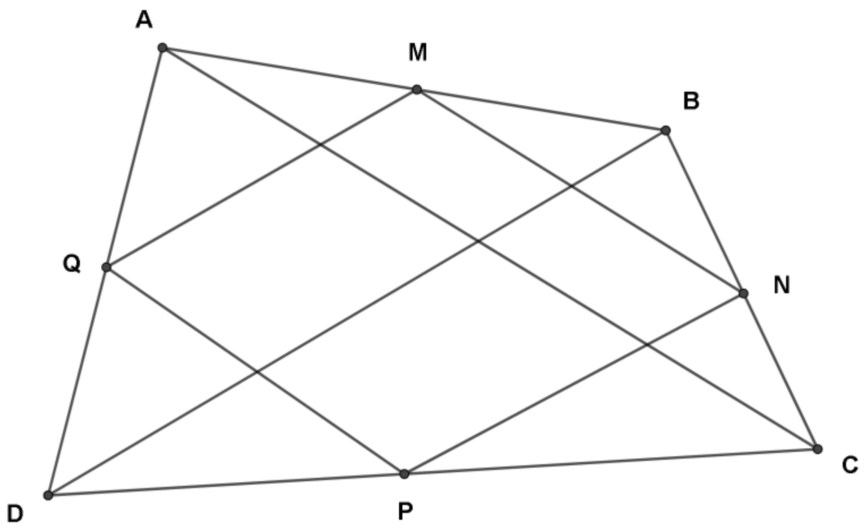
**Afirmação 2:** $n = k^2$.

De fato, se $k$ divide $n$ tal que $1 < k < n$ então existe algum número natural $q$ com $1 < q < n$ tal que $n = k \cdot q$. Pela unicidade, segue que $k = q$. Logo, $n = k^2$.

Note que $400 = 20^2$. Então, entre 1 e 20 existem exatamente 8 números primos, isto é, $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$ e $19$. Assim, os números quase-primos são dados por $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2$ e $19^2$.

Portanto, o total de números quase-primos entre 1 e 400 é 8.

**Q2.** Considere $ABCD$ um quadrilátero convexo conforme mostra a figura abaixo:




Sejam $M, N, P$ e $Q$ os pontos médios dos segmentos $AB$, $BC$, $CD$ e $DA$, respectivamente. Denote por $[MNPQ]$ a área do quadrilátero $MNPQ$ e $[ABCD]$ a área do quadrilátero $ABCD$. Calcule o valor da razão

$$\frac{[MNPQ]}{[ABCD]}.$$

**SOLUÇÃO:** Desde que os pontos $M$ e $Q$ são pontos médios dos segmentos $AB$ e $AD$, respectivamente, então o segmento $QM$ é uma base média do triângulo $ABD$ e consequentemente, $\overline{QM} = \dfrac{BD}{2}$. Além disso, os triângulos $AQM$ e $ABD$ são semelhantes cuja razão de semelhança é de $1:2$. Denotando por $[AQM]$ e $[ABD]$ as áreas dos triângulos $AQM$ e $ABD$, segue que

$$\frac{[AQM]}{[ABD]} = \frac{1}{4}.$$

Usando os mesmos argumentos e notações para os outros triângulos, concluimos que

$$\frac{[DQP]}{[ACD]} = \frac{1}{4} \tag{1}$$

$$\frac{[PCN]}{[BCD]} = \frac{1}{4} \tag{2}$$

$$\frac{[MNB]}{[ABC]} = \frac{1}{4}. \tag{3}$$

Assim,

$$[AQM] = \frac{[ABD]}{4}, [DQP] = \frac{[ACD]}{4}, [PCN] = \frac{[BCD]}{4} \quad \text{e} \quad [MNB] = \frac{[ABC]}{4}.$$

Logo,

$$[AQM] + [DQP] + [PCN] + [MNB] = \frac{1}{4} \cdot ([ABD] + [ACD] + [BCD] + [ABC]) = \frac{[ABCD]}{2}.$$

Portanto, $[MNPQ] = \dfrac{[ABCD]}{2}$ e daí segue que a razão $\dfrac{[MNPQ]}{[ABCD]}$ é $\dfrac{1}{2}$.

**Q3.** O $\pi$-raia dispõe de R\$ 176,00 reais para comprar chocolates. Ele vai à uma loja que os oferece em apenas dois tipos: brancos e pretos. Os chocolates brancos valem R\$ 5,00 reais e os chocolates pretos valem R\$ 7,00 reais. Utilizando o valor total exato disponível pelo $\pi$-raia, qual é a menor e maior quantidade de chocolates que ele pode comprar?

**PRIMEIRA SOLUÇÃO:** Para determinar a maior quantidade de chocolates que o $\pi$-raia pode comprar com 176,00 reais, devemos comprar mais chocolates brancos, que são os mais baratos e, portanto, menos chocolates pretos. Logo, devem-se comprar a menor quantidade de chocolates prestos de modo que o valor restante seja um múltiplo de 5. Tem-se:

$$176 = 7 + 169, \qquad 176 = 2 \times 7 + 162, \qquad 176 = 3 \times 7 + 155$$

Como 169 e 162 não são multiplos de 5 e $155 = 31 \times 5$, a menor quantidade de chocolates pretos que podemos comprar é 3 e, com o restante dos 176 reais, podemos comprar 31 chocolates brancos. Assim, 34 é a maior quantidade de chocolates que o $\pi$-raia pode comprar com os 176 reais; 3 pretos e 31 brancos.

Para determinar a menor quantidade de chocolates que se podem comprar com os 176 reais, devem-se comprar mais chocolates pretos que são os mais caros e, portanto, menos chocolates brancos. Então, devem-se comprar a menor quantidade de chocolates brancos de modo que o valor restante seja um múltiplo de 7. Temos:

$$176 = 5 + 171, \qquad 176 = 2 \times 5 + 166, \qquad 176 = 3 \times 5 + 161.$$

Como 171 e 166 não são múltiplos de 7 e $161 = 23 \times 7$, a menor quantidade de chocolates que o $\pi$-raia pode comprar com os 176 reais são 26 chocolates: 3 brancos e 23 pretos.

**SEGUNDA SOLUÇÃO:** Devemos procurar números inteiros positivos $n$ e $m$ tais que $7n + 5m = 176$ e cuja soma $n + m$ seja máxima e mínima. Os múltiplos positivos de 7 e 5 são respectivamente:

$$M(7) = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, \cdots\} \qquad M(5) = \{5, 10, 15, 20, \cdots\}$$

Para que a soma de um múltiplo de 7 com um múltiplo de 5 seja 176, temos duas possibilidades:

1. O dígito da unidade do múltiplo de 7 seja 1 e o dígito da unidade do múltiplo de 5 seja 5;
2. O dígito da unidade do múltiplo de 7 seja 6 e o dígito da unidade do múltiplo de 5 seja 0.

Para o primeiro caso temos as seguintes possibilidades:

- $n = 3$, teríamos $21 + 5m = 176$, daí $m = 31$;
- $n = 13$, teríamos $91 + 5m = 176$, resulta $m = 17$;
- $n = 23$, teríamos $161 + 5m = 176$, segue que $m = 3$;
- Os outros múltiplos de 7 cujo dígito da unidade é 1, são maiores que 176.

Para o segundo caso temos:

- $n = 8$, teríamos $56 + 5m = 176$, resulta $m = 24$;
- $n = 18$, teríamos $126 + 5m = 176$, fornece $m = 10$;
- Os outros múltiplos de 7 cujo dígito da unidade é 6, são maiores que 176.

Resumindo: Os números inteiros positivos $n$ e $m$ que satisfazem a equação $7n + 5m = 176$ são:

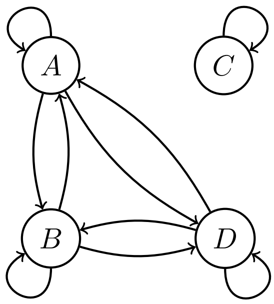
| $n$ | $m$ | $n+m$ |
|---|---|---|
| 3 | 31 | 34 |
| 13 | 17 | 30 |
| 23 | 3 | 26 |
| 8 | 24 | 32 |
| 18 | 10 | 28 |

Assim, a menor quantidade de chocolates que o $\pi$-raia pode comprar é 26 e a maior é 34.

**Q4.** Uma certa empresa deseja implementar um projeto que prevê a construção de diversas ferrovias ligando 4 cidades. O projeto estipula ainda algumas regras que devem ser seguidas:

i. Entre duas cidades distintas quaisquer podem haver no máximo duas ferrovias;
ii. Toda cidade deve possuir uma única ferrovia ligando ela à si mesma;
iii. Se houver uma ferrovia ligando uma cidade A à outra cidade B, deve haver também uma ferrovia ligando B à A;
iv. Se houver uma ferrovia ligando uma cidade A à outra cidade B, e uma segunda ferrovia ligando B à C, então deve haver uma terceira ferrovia ligando A à C.

Para exemplificar uma possível implementação do projeto, a empresa forneceu ainda um diagrama, onde as 4 cidades são representadas pelas letras $A$, $B$, $C$ e $D$ e as ferrovias, por flechas, conforme abaixo:




De quantas maneiras distintas a empresa pode implementar esse projeto?

**SOLUÇÃO:** Seja $X = \{A, B, C, D\}$ o conjunto das cidades. Diremos que duas cidades, não necessariamente distintas, se comunicam se houver uma ferrovia entre elas. Note que cada maneira de se implementar o projeto divide as 4 cidades em grupos (não-vazios) de cidades que se comunicam entre si. Além disso, dadas quaisquer duas cidades, há apenas duas possibilidades: (i) elas pertencem ao mesmo grupo e, portanto, se comunicam; (ii) elas pertencem à grupos distintos, e não se comunicam. Assim, por exemplo, uma maneira de implementar o projeto seria dividir as cidades nos 2 grupos abaixo:

$$\{A, B, D\}, \text{ e } \{C\}.$$

Note que esta maneira corresponde ao diagrama fornecido no enunciado do problema. Ora, podemos dividir o conjunto $X$ em grupos da seguinte forma:

1. Um único grupo com todas as cidades;
2. Um grupo com 3 cidades e outro grupo com uma cidade;
3. Um grupo com 2 cidades e outro grupo com 2 cidades;
4. Um grupo com 2 cidades, outro com uma cidade e um terceiro com uma cidade;
5. Quatro grupos com uma cidade cada.

No caso 1, só existe uma única maneira de formar um grupo com as 4 cidades. No caso 2, a escolha da cidade que não se comunicará com as demais determina a divisão dos dois grupos. Isso pode ser feito de 4 modos. No caso 3, escolha uma cidade qualquer. Há 3 outras cidades com quem essa cidade pode se relacionar. Feito essa escolha, os dois grupos ficam determinados. No caso 4, há $4 \cdot 3 = 12$ maneiras de se escolher as duas cidades que irão se comunicar. Porém cada escolha dessa foi contada duas vezes, logo existem apenas 6 maneiras distintas. Uma vez escolhida o grupo com 2 cidades, os demais grupos ficam determinados. Por fim, no caso 5, há uma única maneira de se formar 4 grupos com uma cidade cada.

Resulta que o número total de maneiras distintas de se implementar o projeto é $1 + 4 + 3 + 6 + 1 = 15$.

**Q5** Uma lotérica vende bilhetes de loteria numerados sequencialmente de 100.000 até 500.000. Um bilhete é premiado se o número formado pelos seus 3 últimos dígitos é igual ao dobro do número formado pelos seus 3 primeiros dígitos.

**(A)** Encontre os três bilhetes premiados com menor numeração e os três bilhetes premiados com maior numeração.

**(B)** Quantos bilhetes premiados existem?

**(C)** Determine a soma das numerações de todos os bilhetes premiados.

**SOLUÇÃO:**

(A) Por inspeção os menores bilhetes premiados são 100200, 101202 e 102204. Também por inspeção, temos que os maiores bilhetes premiados são 499998, 498996 e 497994.

(B) Existe um bilhete premiado para cada número de 100 até 499. Logo, existem 400 bilhetes premiados.

(C) Seja $n$ a numeração de um bilhete premiado. Se $A$ representa o número formado pelos dígitos do milhar, das dezenas de milhar e das centena de milhar da numeração do bilhete $n$ e $B$ representa o número formado pelos dígitos das unidades, das dezenas e das centenas do bilhete $n$, então $n = 1000A + B$. Note que um bilhete é premiado quando $B = 2A$.

Observando os números obtidos no item (A), podemos observar que a diferença entre a numeração de um bilhete premiado e a numeração do próximo bilhete premiado indo de 100000 até 500000 é sempre 1002. Vamos provar isso.

Note que $n = 1000A + B$ é premiado com $100 \leq A < 499$, então o próximo bilhete premiado é o $m = (A + 1) \cdot 1000 + B + 2$. Desse modo,

$$m - n = 1000(A + 1) + B + 2 - (1000A + B) = 1002.$$

Assim, os bilhetes premiados são os com numeração $100200 + k.1002$ com $k$ variando entre 0 e 399.

Temos que calcular a seguinte soma $S$ com 400 parcelas:

$$S = 100200 + 101202 + 102204 + \cdots + 497994 + 498996 + 499998$$

Note que a soma do primeiro com o últímo número da sequência é igual a soma do segundo com o penúltimo que por sua vez é igual a soma do terceiro com o antipenúltimo e assim por diante, ou seja,

$$100200 + 499998 = 101202 + 498996 = 102204 + 497994 = \cdots = 600198.$$

Então, a soma $S$ das númerações dos bilhetes é igual a uma soma com 200 parcelas iguais a 600198. Desse modo,

$$S = 600198 \cdot 200 = 120039600.$$