



Olimpíada Pernambucana de Matemática 2023
Primeira Fase - Nível 1 (6º e 7º anos)

CADERNO DE QUESTÕES E SOLUÇÕES


REALIZAÇÃO:



APOIO:



LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.
02. Preencha os dados pessoais.
03. A prova é composta de 12 questões de múltipla escolha: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 10 pontos, totalizando 120 pontos.
04. Para marcar a resposta, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul com o modelo:

05. A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.
06. Marcações duplas, em branco ou diferentes do exemplo acima serão desconsideradas.
07. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.
08. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.
09. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.
10. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.
11. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.
12. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.
13. Duração da prova: 2 horas e 30 minutos.

NOME: _____

NÚMERO DA IDENTIDADE: _____ ÓRGÃO EXPEDIDOR: _____

ASSINATURA: _____

Q1. Numa determinada máquina se a tecla \times for apertada, o número que está na tela é multiplicado por 3; se tecla $-$ for apertada, o número que está em tela é diminuído por 2. Por exemplo, se o número em tela é 10, apertando a tecla $-$ aparecerá o número 8. Por outro lado, se o número em tela for 10 e apertarmos a tecla \times aparecerá o número 30.

Começando com o número 1 na tela, quantas vezes no mínimo as teclas " \times " e " $-$ " devem ser apertadas para que apareça o número 17 na tela?

- (A) 4
- (B) 5
- (C) 6
- (D) 7
- (E) 8

SOLUÇÃO:

Para encontrar o mínimo, basta seguirmos o algoritmo natural abaixo:

-Se o número em tela é menor que 17, consideramos as duas possibilidades de clique.

-Se em dado momento, o número em tela é maior que 17, a partir daí, apertaremos apenas a tecla – quantas vezes for necessário até chegar ao 17.

- Se em dado caminho já clicamos mais vezes que em outro caminho que acabou em 17, e não estamos em 17, paramos. Se chegamos em dado momento em um valor que esteve em outro caminho, paramos. O diagrama abaixo mostra as possibilidades de caminho de acordo com o algoritmo:

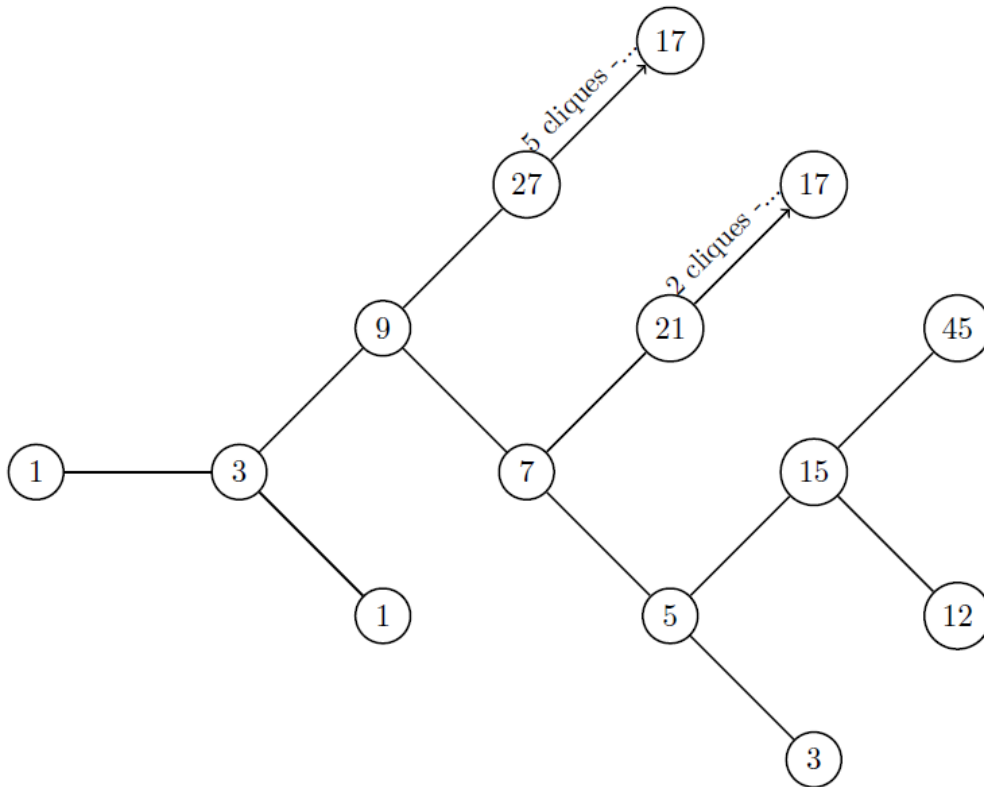
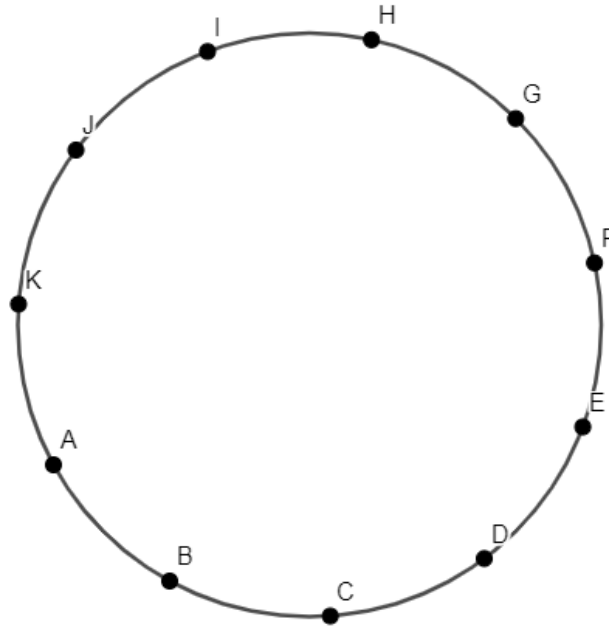


Figure 1: Diagrama seguindo o algoritmo

Portanto, o mínimo é 6 obtido seguindo o caminho: $1 \xrightarrow{3\times} 3 \xrightarrow{3\times} 9 \xrightarrow{-2} 7 \xrightarrow{3\times} 21 \xrightarrow{-2} 19 \xrightarrow{-2} 17$.

Portanto, a alternativa correta é a letra (C).

Q2. Definimos um decágono como um polígono de 10 lados. No círculo abaixo estão dispostos 11 pontos distintos. De quantos modos se pode formar um decágono escolhendo 10 desses pontos como vértices?



- (A) 10
- (B) 11
- (C) 21
- (D) 110
- (E) 11^{10}

SOLUÇÃO: Para formar um decágono, basta escolher o vértice que ficará fora. O vértice pode ser escolhido de 11 maneiras.

Portanto, podemos formar um decágono de 11 formas diferentes, o que mostra que a alternativa correta é a letra (B).

Q3. Numa aula de potenciação, a professora pediu a Pedrinho que calculasse o último dígito de 2023^{2023} . Inicialmente, Pedrinho pensou em usar a sua calculadora, porém descobriu que a mesma não consegue exibir números grandes. Então, decidiu usar os recursos de aritmética para encontrar o dígito pedido. Sabendo que ele acertou, qual o último dígito encontrado?

- (A) 1
- (B) 3
- (C) 9
- (D) 7
- (E) 6

SOLUÇÃO: Observe o seguinte raciocínio:

$$\begin{aligned}3^0 &= 1 \\3^1 &= 3 \\3^2 &= 9 \\3^3 &= 27 \\3^4 &= 81 \\3^5 &= 243, \\&\dots\end{aligned}$$

ou seja, existe uma periodicidade entre os últimos dígitos das potências de 3 que é a sequência 1397, onde os números 1, 3, 9 e 7 estão nas posições 0, 1, 2 e 3, respectivamente. Além disso,

$$2023 = 505 \cdot 4 + 3.$$

Neste caso, o resto da divisão 3 representa a posição da sequência periódica que é o número 7.

Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

Q4. Um dispositivo contém nove painéis dispostos num tabuleiro 3×3 . Cada painel tem dois estados possíveis: ele pode estar aceso ou apagado. Quando tocamos em um painel, todos os painéis que estão na mesma linha e mesma coluna mudam de estado incluindo o painel no qual tocamos. Se cada "x" abaixo representa uma luz apagada, quantos toques são necessários para que todos os painéis fiquem acesos simultaneamente?

x		x
	x	x
x	x	

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) Não é possível acender todas.

SOLUÇÃO: No que segue, basta clicar na interseção da primeira linha com a primeira coluna para obter a seguinte configuração:

	x	
x	x	x
	x	

e a seguir clique na interseção da segunda linha e segunda coluna, e assim teremos todos os painéis ligados simultaneamente, o que mostra que a alternativa correta é a letra (*B*).

Q5. Um par (x, y) de inteiros positivos é dito batizado se $x + y = 300$ e $\text{m.d.c.}(x, y) = 10$. Quantos são os pares batizados?

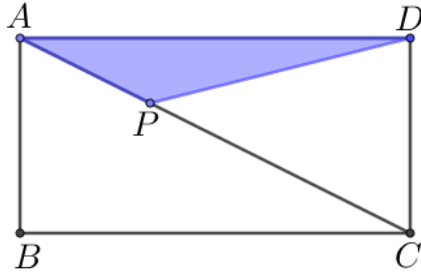
- (A) 8
- (B) 9
- (C) 10
- (D) 30
- (E) 40

SOLUÇÃO: Desde que $\text{mdc}(x, y) = 10$, então existem k e p inteiros positivos tais que $x = 10k$ e $y = 10p$, onde $\text{mdc}(k, p) = 1$. Além disso, segue que $k + p = 30$. Portanto, o total de pares (k, p) que satisfaz $k + p = 30$ com $\text{mdc}(k, p) = 1$ é 8, o que mostra que a alternativa correta é a letra (A).

- 6.** Um jogo de cartas, tem 30 cartas azuis e 30 cartas verdes. As cartas de cada grupo são numeradas de 1 até 30. As cartas ficam viradas para baixo, não sendo possível ver o seu número. Em cada jogada, o jogador pega uma carta verde e uma carta azul. Se a soma dos números das cartas é par, ele pontua. Para quantos pares de cartas o jogador ganha ponto?
- (A) 10
 - (B) 30
 - (C) 60
 - (D) 450
 - (E) 550

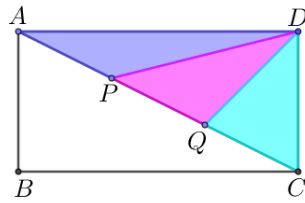
SOLUÇÃO: Se o jogador pega uma carta de número par, basta pegar outra carta de número par dentre outras 15 disponíveis, então temos um total de $15 \cdot 15 = 225$ pares. Se o jogador pega uma carta de número ímpar, basta pegar outra carta de número ímpar dentre outros 15 números ímpares disponíveis, então temos um total de $15 \cdot 15 = 225$ pares. Então, concluímos que a quantidade de pares é $225 + 225 = 450$, o que mostra que a alternativa correta é a letra (*D*).

7. Na figura abaixo, $ABCD$ é um retângulo. Se $AP = \frac{1}{3}AC$, qual é a razão entre a área do triângulo APD e a área do retângulo?



- (A) $\frac{1}{5}$
- (B) $\frac{2}{9}$
- (C) $\frac{3}{10}$
- (D) $\frac{1}{6}$
- (E) $\frac{3}{8}$

SOLUÇÃO: Seja Q o ponto sobre a diagonal AC tal que $AP = PQ = QC$. Veja figura abaixo

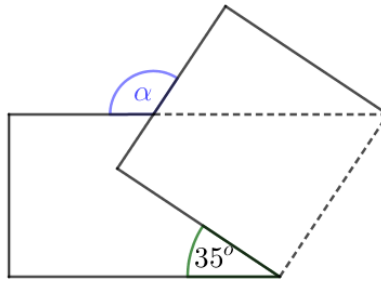


Considerando que os triângulos $\triangle APD$, $\triangle PQC$ e $\triangle QCD$ tem a base sobre a diagonal AC , temos que eles possuem a mesma medida e a mesma altura, logo tem a mesma área. Daí:

$$[APD] = \frac{1}{3}[ACD] = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}[ABCD] \right) = \frac{1}{6}[ABCD].$$

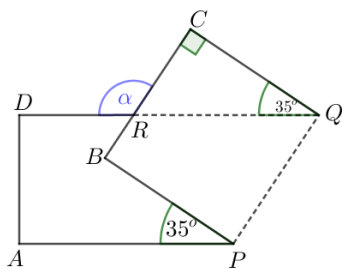
Logo, a alternativa correta é letra (D).

8. Na figura abaixo, um retângulo foi dobrado. Qual é a medida do ângulo α ?



- (A) 125°
- (B) 135°
- (C) 140°
- (D) 130°
- (E) 150°

SOLUÇÃO: Na figura abaixo, os ângulos $\angle APB$ e $\angle DQC$ são correspondente, com respeito às paralelas DQ e AP , logo tem a mesma medida.

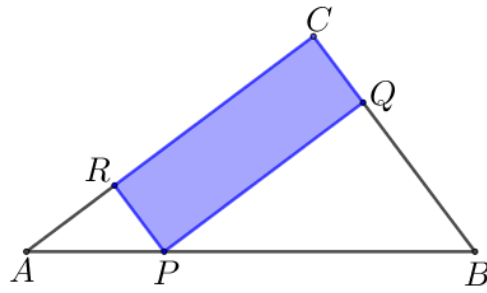


Agora, note que o ângulo α é um ângulo exterior ao $\triangle RQC$. Logo,

$$\alpha = \angle RCQ + \angle RQC = 90^\circ + 35^\circ = 125^\circ$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (A).

9. Na figura abaixo, temos $QB = 5\text{ cm}$ e $AR = 2\text{ cm}$. Qual é a área do retângulo $RPQC$?



- (A) 9 cm^2
- (B) 10 cm^2
- (C) 11 cm^2
- (D) $19/2\text{ cm}^2$
- (E) $21/2\text{ cm}^2$

SOLUÇÃO: Denotando o lado RC por x e o lado QC por y e usando semelhança de triângulos, concluímos que

$$\frac{y}{2} = \frac{y+5}{x+2}.$$

Consequentemente, $xy = 10$, o que mostra que a área do retângulo $RPQC$ é 10cm^2 e assim, a alternativa correta é a letra (B).

10. Qual é o dígito da unidade do número abaixo?

$$(5^5 + 1)(5^6 + 2)(5^7 + 3)(5^8 + 4)$$

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 4
- (D) 6
- (E) 8

SOLUÇÃO: O último dígito de uma potência de 5 é sempre o número 5. Daí, podemos concluir o seguinte: Os últimos dígitos dos números $5^8 + 4$, $5^7 + 3$, $5^6 + 2$ e $5^5 + 1$ são 9, 8, 7 e 6, respectivamente. Logo, fazendo o produto dos últimos dígitos, segue que

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024,$$

o que mostra que o último dígito é o número 4, e conseqüentemente a alternativa correta é a letra (C).

11. As medidas em metros dos lados de dois quadrados são números inteiros. Se o quadrado menor tivesse $7m^2$ de área a mais, os dois quadrados seriam congruentes. Quanto pode medir o lado do maior quadrado? **Dica:** $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$.

- (A) 4
- (B) 5
- (C) 6
- (D) 7
- (E) 8

SOLUÇÃO: Assuma que os lados dos quadrados sejam a e b , onde $a > b$ e $a, b \in \mathbb{N}$. Sabendo que $b^2 + 7 = a^2$, obtemos a seguinte fatoração

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= 7 \\(a - b)(a + b) &= 1 \cdot 7.\end{aligned}$$

Como $a - b < a + b$ então $a - b = 1$ e $a + b = 7$, teríamos $a = 4$.

Logo, a alternativa correta é a letra (A).

12. Na primeira rodada do Campeonato Pernambucano de futebol, 10 ingressos no Estádio José do Rego Maciel tinham o mesmo valor que 8 ingressos no Estádio Ademar da Costa Carvalho. Após a primeira rodada do campeonato, o preço do ingresso no Estádio José do Rego Maciel caiu 3% e o preço do ingresso no Estádio Ademar da Costa Carvalho subiu 7%. Quanto se pagará a mais, na segunda rodada do Campeonato Pernambucano de futebol, na compra de 10 ingressos no Estádio José do Rego Maciel e 8 ingressos no Estádio Ademar da Costa Carvalho?

- (A) 1,5%
- (B) 2%
- (C) 2,5%
- (D) 3%
- (E) 3,5%

SOLUÇÃO: Seja x o preço do ingresso no Estádio José do Rego Maciel e y o preço do ingresso do Estádio Ademar da Costa Carvalho. Observe que

$$10x = 8y$$

e o preço total gasto na primeira rodada é dado por

$$P = 20x = 16y,$$

consequentemente, $y = \frac{5x}{4}$.

Após a primeira rodada o novo preço do Estádio José do Rego Maciel é dado por $0,97x$ e o novo preço do Estádio Ademar da Costa Carvalho é dado por $1,07y$.

Logo, usando o fato que $y = \frac{5x}{4}$, podemos concluir que o preço total após a primeira rodada é dado por

$$\begin{aligned} P' &= 10 \cdot (0,97x) + 8 \cdot (1,07y) \\ &= 9,7x + 8,56y \\ &= 9,7x + 8,56 \cdot \frac{5x}{4} \\ &= 9,7x + \frac{42,8}{4}x \\ &= 9,7x + 10,7x \\ &= 20,4x. \end{aligned}$$

Logo, $P' - P = 20,4x - 20x = 0,4x = \frac{1}{50}20x = 0,02 \cdot 20x = 0,02 \cdot P$, o que mostra que o gasto adicional é de 2% e assim segue que a alternativa correta é a letra (B).