Olimpíada Pernambucana de Matemática 2025

Segunda Fase - Nível 3 (Ensino médio)

CADERNO DE QUESTÕES

Nome completo do(a) aluno(a): ______________________________.

Número da identidade: ______________. Órgão Expedidor: ______________.

Assinatura: ______________________________.

LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. A prova é composta de 5 questões dissertativas: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos.

04. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

05. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

06. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

07. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.

08. Se a Comissão considerar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

09. Duração da prova: 4 horas.

Realização

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Apoio

Acesse nosso site e nosso instagram:

www.opemat.com.br www.instagram.com/opemat.ufrpe/

1. O professor Rogério desafiou seus alunos a investigarem quais números inteiros positivos podem ser escritos como a diferença entre dois quadrados perfeitos. Ou seja, eles procuram números n que possuem solução para a equação:

$$n = a^2 - b^2$$

onde a e b são números inteiros.

Por exemplo, o número 5 pode ser escrito dessa forma, pois $5 = 3^2 - 2^2$. Já o número 9 pode ser escrito como $9 = 5^2 - 4^2$ e também como $9 = 3^2 - 0^2$.

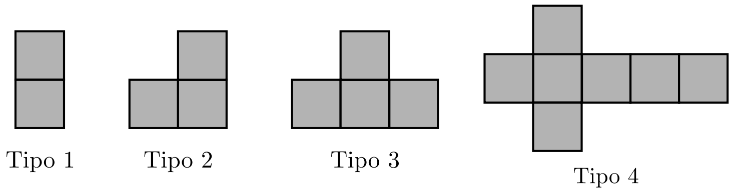
a) Encontre valores inteiros de a e b que mostrem que os números 13 e 20 podem ser escritos como a diferença entre dois quadrados perfeitos.

b) O professor Rogério afirmou que o número 14 jamais poderia ser escrito como a diferença de dois quadrados de inteiros. Justifique matematicamente por que o número 14 não possui solução para esse problema.

c) Prove que todo número ímpar maior que 1 pode ser escrito como a diferença entre dois quadrados perfeitos.

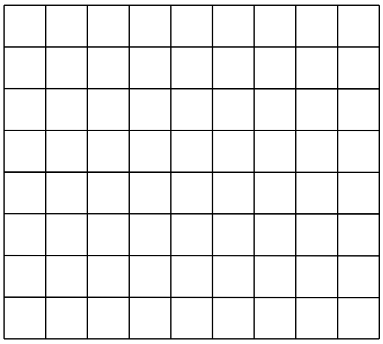
Solução:

2. O pai de Mateus recortou diversas peças de quatro tipos diferentes, todas compostas por quadrados unitários, conforme ilustrado abaixo. Considere que há um estoque ilimitado de cada tipo de peça e que todas podem ser rotacionadas ou refletidas.

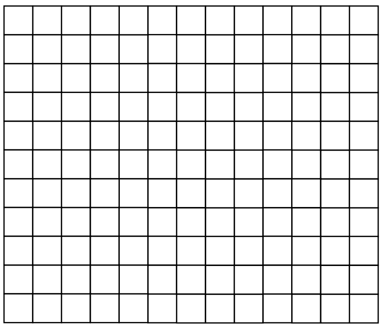


Mateus deve decidir se é possível cobrir perfeitamente (sem sobreposições ou espaços vazios) certos tabuleiros retangulares utilizando apenas alguns dos tipos de peças fornecidos. Determine se:

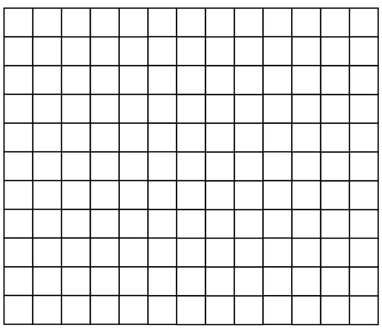
(a) é possível cobrir um tabuleiro 8×9 usando peças do tipo 2 e/ou 3?



(b) é possível cobrir um tabuleiro 11×13 usando peças do tipo 1 e/ou 3?



(c) é possível cobrir um tabuleiro 11×13 usando peças do tipo 1 e/ou 4?



Solução:

3. Em um triângulo ABC, sejam P, Q os pés das bissetrizes interna e externa relativas ao ângulo $\angle ABC$, e seja K a projeção de C em AB. Mostre que AK é bissetriz de $\angle PKQ$.

Solução:

4. Durante uma aula de curvas no plano, o professor propôs um desafio envolvendo o movimento de uma partícula sujeita a forças externas. Ao tentar resolver a equação que modelava o instante em que a partícula muda de direção, os alunos chegaram a uma equação cúbica da forma:

$$x^3 + x + 1 = 0.$$

O professor explicou que essa equação possui apenas uma raiz real, e que ela pode ser expressa de uma forma irredutível da seguinte maneira:

$$\sqrt[3]{A + \frac{1}{2}\sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \frac{1}{2}\sqrt{B}},$$

onde A e B são números racionais com $B > 0$.

Com base nesse modelo de solução e na forma da raiz real da equação dada, responda os seguintes itens:

(a) Prove que é possível escolher a e b números reais tais que

(i) $x = a + b$ é raiz de $x^3 + x + 1 = 0$;

(ii) a^3 e b^3 são raízes de $y^2 + y - \frac{1}{27} = 0$.

(b) Calcule o valor de B.

Solução:

5. Em um quadro estão escritos n números reais (não necessariamente distintos) com soma positiva. Uma operação permitida é escolher dois números do quadro, apagá-los, e escrever no quadro *duas cópias* da média aritmética entre eles (de modo que, após a operação, ainda haja n números escritos no quadro). Mostre que, após um número finito de operações, é possível que todos os números escritos no quadro sejam positivos.

Solução: