Olimpíada Pernambucana de Matemática 2025

Primeira Fase - Nível 3 (Ensino Médio)

CADERNO DE QUESTÕES

Nome completo do(a) aluno(a): ____.

LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. A prova é composta de 12 questões de múltipla escolha: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 10 pontos, totalizando 120 pontos.

04. Para marcar a resposta, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul com o modelo:

F

05. A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.

06. Marcações duplas, em branco ou diferentes do exemplo acima serão desconsideradas.

07. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

08. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

09. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.

10. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

11. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de entregá-la.

12. Se a Comissão verificar que uma questão é ambígua, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, serão distribuídos entre as demais questões.

13. Duração da prova: 2 horas e 30 minutos.

Realização

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Apoio

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
GOVERNO FEDERAL BRASIL UNIÃO E RECONSTRUÇÃO
Associação Olimpíada Brasileira de Matemática
stone
CNPq
Diretório Acadêmico Inovação Departamento de Matemática
UPE Universidade de Pernambuco
UNIVASF Universidade Federal do Vale do São Francisco
Instituto Federal Pernambuco Campus Pesqueira
Editora Universitária da UFRPE

Acesse nosso site e nosso instagram:

OPEMAT www.opemat.com.br www.instagram.com/opemat.ufrpe/

1. Na cozinha da vovó, há 12 potes coloridos de bombons, todos distintos:

- 7 potes azuis com quantidade par de bombons,
- 5 potes vermelhos com quantidade ímpar de bombons.

João e Maria querem escolher 3 potes para dividir igualmente entre eles. Para que a divisão seja justa, o total de bombons dos 3 potes deve ser um número par (assim, cada um recebe metade exata, sem sobra de bombons).

De quantas maneiras distintas eles podem escolher os 3 potes?

(A) 35

(B) 45

(C) 70

(D) 90

(E) 105

2. Considere a soma

$$S = 1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 7 - 8 + 9 + 10 + 11 - 12 + \cdots + \\ + 397 + 398 + 399 - 400.$$

Assinale a alternativa que corresponde ao valor de S.

(A) 39.800

(B) 60.000

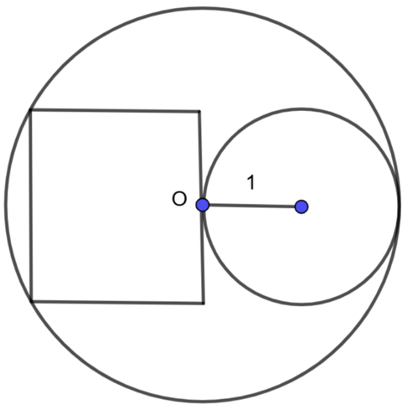
(C) 70.100

(D) 75.150

(E) 80.200

3. Considere um quadrado com dois de seus vértices pertencentes a uma circunferência de centro no ponto O.

Uma circunferência menor de raio 1 é tangente a um dos lados do quadrado em O e tangente à circunferência maior, conforme ilustra a figura abaixo.



Assinale a alternativa que corresponde à área do quadrado.

(A) $\dfrac{16}{5}$

(B) 4

(C) $\dfrac{9}{4}$

(D) 1

(E) 5

4. Um número natural n entre 901 e 1018 possui 3 divisores. Assinale a alternativa que corresponde à soma dos dígitos de n:

(A) 15

(B) 16

(C) 17

(D) 18

(E) 19

5. Seja $A(x)$ uma expressão algébrica satisfazendo $A(0) \geq 0$ tal que a equação

$$x^2 + x + 1 = \frac{3}{4}([A(x)]^2 + 1)$$

é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de $A(x+1) - A(x)$.

(A) $\dfrac{3}{4}$

(B) x

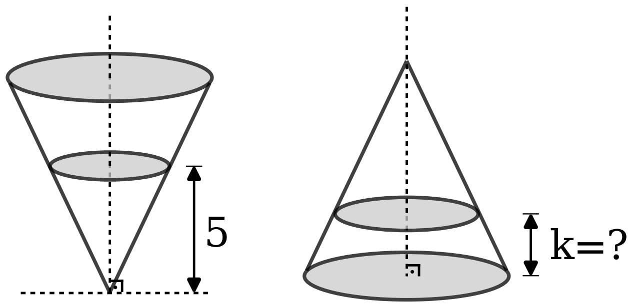
(C) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(D) 0

(E) $\sqrt{3}$

6. Em um laboratório, um recipiente em forma de cone circular reto, com raio da base medindo 4 unidades de comprimento e altura de 10 unidades, é utilizado para medir volumes de líquidos.

Um pesquisador o preenche com um certo volume de água e o coloca sobre uma mesa plana na **Configuração A** (Figura 1), conforme ilustra a figura abaixo, medindo a altura do cone de água que se formou dentro do recipiente. Em seguida, ele inverte o recipiente, e o coloca novamente sobre a mesa na **Configuração B** (Figura 2).



1. Configuração A 2. Configuração B

Admitindo que o volume do cone de água no recipiente é o mesmo em ambas as configurações, assinale a alternativa que corresponde à altura k do cone de água na **Configuração B**.

(A) $10 - 5\sqrt{2}$

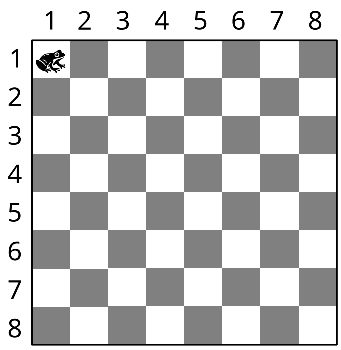
(B) $10 - 5\sqrt[3]{2}$

(C) $10 - 5\sqrt[3]{5}$

(D) $10 - 5\sqrt[3]{7}$

(E) $10 - \sqrt[3]{7}$

7. Considere um tabuleiro 8×8 pintado, conforme a figura abaixo, e denote pelo par ordenado (i, j) a casa que está na i-ésima linha e j-ésima coluna do tabuleiro.



Um **sapo robô** está inicialmente na posição $(1, 1)$. Ele só pode realizar saltos de exatamente 1 ou 3 casas, sempre dentro do tabuleiro. No primeiro salto, o sapo deve se mover ao longo da linha em que se encontra. No segundo salto, ele deve se mover ao longo da coluna. Nos saltos seguintes, ele deve alternar sempre entre linha e coluna.

Por exemplo, a partir da posição inicial $(1, 1)$, o sapo pode ir para as casas $(1, 2)$ ou $(1, 4)$ no primeiro salto. Após 2025 saltos, o que podemos afirmar?

(A) O sapo pode terminar na casa (6,3).

(B) O sapo pode terminar na casa (5,7).

(C) O sapo pode terminar na casa (7,4).

(D) O sapo pode terminar na casa (4,5).

(E) Nenhuma das anteriores.

8. Durante uma feira de ciências, os organizadores montaram um painel interativo com cartões contendo todos os divisores positivos de 2025^2. Cada cartão contém um único divisor e cada divisor foi escrito em apenas um cartão. Três visitantes escolhem, sem reposição, um cartão cada um. Seja

$$P = \frac{m}{n},$$

com m e n primos entre si, a probabilidade de que entre os três números escolhidos, haja exatamente um número **primo** e dois **quadrados perfeitos**.

Assinale a alternativa que corresponde à soma $m+n$.

(A) 48

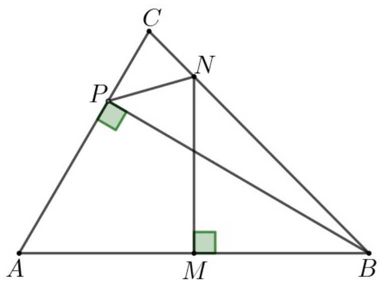
(B) 480

(C) 2.028

(D) 2.943

(E) 14.400

9. Na figura abaixo, M é ponto médio do segmento AB.



Sabendo que $\widehat{PBC} = 15^o$ e $\widehat{ABP} = 30^o$, assinale a alternativa que corresponde à medida de $\widehat{PNM}$.

(A) 60^o

(B) 65^o

(C) 72^o

(D) 74^o

(E) 75^o

10. Seja $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz equação

$$f(\arctan(x)) = \frac{1}{x^2+1},$$

para todo $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Se

$$y = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

assinale a alternativa que corresponde ao valor de $f(y)$.

(A) 1

(B) $\frac{4}{5}$

(C) $\frac{16}{25}$

(D) $\frac{1}{5}$

(E) $\frac{\pi}{2}$

11. Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é dita **multiplicativa** se $f(1) = 1$ e

$$f(pq) = f(p)f(q)$$

para todos p e q coprimos.

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função multiplicativa tal que

$$f(p^k) = p^{k-1}(p+1)$$

para todo primo p e $k \geq 1$.

Assinale a alternativa que corresponde à quantidade de números naturais n que possuem exatamente quatro divisores e satisfazem $f(n) = 540$.

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

12. Dois amigos, Pedro e João, disputaram várias partidas de Jogo da Velha, atribuindo-se 1 ponto ao vencedor de cada partida. Ao final, Pedro venceu João por 6 a 4.

De quantas maneiras distintas esse placar pode ser obtido, sabendo que, ao longo da disputa, Pedro nunca esteve atrás no número de pontos ?

(A) 42

(B) 45

(C) 48

(D) 60

(E) 90

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO

Identificação

Escola:____________________ Turma:__________

Nome: ______________________________

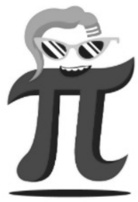
Número da Identidade:__________ Órgão Expedidor:______________

Assinatura:______________________________

Gabarito

Pi-raia
π-raia

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E



Pi-veta
π-veta