



Olimpíada Pernambucana de Matemática 2025

Segunda Fase - Nível 2 (8º e 9º anos)

CADERNO DE QUESTÕES



Nome completo do(a) aluno(a): _____.

Número da identidade: _____. Órgão Expedidor: _____.

Assinatura: _____.

LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.
02. Preencha os dados pessoais.
03. A prova é composta de 5 questões dissertativas: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos.
04. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.
05. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.
06. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.
07. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.
08. Se a Comissão considerar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.
09. Duração da prova: 4 horas.

Realização



UNIVERSIDADE
FEDERAL RURAL
DE PERNAMBUCO DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA

Apoio



Acesse nosso site e nosso instagram:



www.opemat.com.br



www.instagram.com/opemat.ufrpe/

1. As formigas Ana e Bia estão construindo formigueiros seguindo regras matemáticas diferentes:
- Ana cria um formigueiro com **camadas** horizontais. A 1ª camada tem 1 câmara. Cada nova camada tem 2 câmaras a mais do que a anterior. Assim, a primeira tem 1 câmara, a segunda tem 3, a terceira tem 5 e assim por diante.
 - Bia cria um formigueiro cavando em **níveis** verticais de cima para baixo. O 1º nível tem 1 câmara. Cada novo nível tem o dobro de câmaras do nível anterior. Assim, o primeiro nível tem 1 câmara, o segundo tem 2, o terceiro tem 4 e assim por diante.
- a) Quantas câmaras terá a 6ª camada de Ana? E quantas terá o 6º nível de Bia?
- b) Ana planeja fazer um formigueiro com 40 camadas. Calcule o número total de câmaras somando todas as 40 camadas.
- c) Qual é a quantidade mínima de níveis que Bia precisa escavar para que o total de câmaras do seu formigueiro seja maior do que o formigueiro de 40 camadas de Ana?

Solução:

2. Um grupo de 6 bailarinas veste camisetas numeradas de 1 até 6. No palco, existem 6 marcas no chão também numeradas de 1 até 6. Uma “*formação*” consiste em posicionar cada bailarina sobre uma marca, de modo que todas as marcas estejam ocupadas. Dizemos que uma bailarina está na *posição original* quando o número de sua camiseta é igual ao número da marca no chão.

- a) Considere apenas as 5 bailarinas numeradas de 1 até 5 e as marcas de 1 até 5. Quantas formações existem em que nenhuma bailarina esteja na sua posição original?
- b) Considere agora as 6 bailarinas. Quantas formações existem em que exatamente uma bailarina esteja na **posição original** e as outras cinco estejam fora da sua **posição original**?
- c) Considere novamente as 6 bailarinas. Chamamos de *caminhada* uma forma de reorganizar as bailarinas: Para cada marca X no chão é designada uma nova marca Y no chão (X pode ser igual a Y), de modo que a bailarina que estava sobre a marca X se movimentará para a marca Y .

Podemos representar uma caminhada por uma tabela de duas linhas: na primeira linha, temos as marcas de 1 a 6; na segunda linha, embaixo de cada marca X , há a marca Y para onde a bailarina da marca X se movimentou.

Por exemplo, a seguinte tabela

Início	1	2	3	4	5	6
Depois	2	1	3	4	5	6

indica que as bailarinas das marcas 1 e 2 trocaram de lugar, e as demais permaneceram onde estavam.

Uma caminhada é chamada de *espelhada* quando, começando com todas as bailarinas em suas posições originais e realizando a caminhada duas vezes seguidas, todas voltam às posições originais.

A caminhada acima é espelhada. Já a caminhada

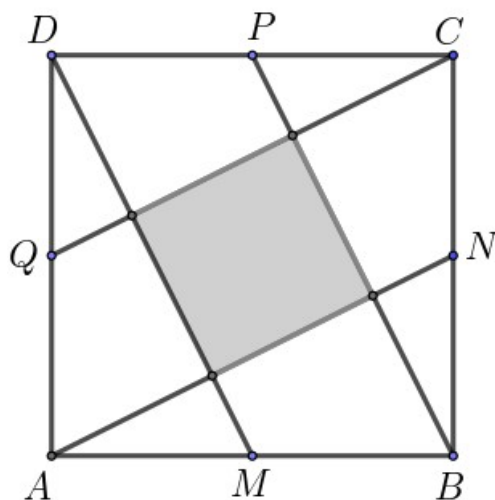
Início	1	2	3	4	5	6
Depois	2	3	1	4	5	6

não é espelhada, pois, ao repeti-la, a bailarina 1 termina na marca 3, que não é sua posição original.

Quantas caminhadas espelhadas existem?

Solução:

3. Considere um quadrado $ABCD$. Sejam M , N , P e Q os pontos médios dos lados AB , BC , CD e DA , respectivamente. Observe a figura abaixo, construída a partir desses pontos. Determine a razão entre a área do quadrilátero hachurado e a área total do quadrado $ABCD$.



Solução:

4. Mostre que, para todo inteiro positivo n par,

$$a_n = 3^{2n} \cdot (3^{2n+1} - 1)$$

termina em 02 quando escrito em notação decimal.

Solução:

5. Há uma urna contendo 300 bolas verdes numeradas com o número 2, 200 bolas jade numeradas com o número 3 e 100 bolas violetas numeradas com o número 6. Gabriel, João e Vinicius jogam um jogo composto por 600 rodadas (em cada rodada, apenas um jogador participa). As regras são as seguintes:

- Inicialmente, todas as bolas são retiradas da urna, uma a uma, em ordem aleatória.
- Gabriel joga na i -ésima rodada se, e somente se, a i -ésima bola retirada for verde.
- João joga na i -ésima rodada se, e somente se, a i -ésima bola retirada for jade.
- Vinicius joga na i -ésima rodada se, e somente se, a i -ésima bola retirada for violeta.
- Em cada rodada, o jogador designado deve escolher um número real positivo estritamente menor que o número escrito na bola correspondente.
- O vencedor é o jogador que obtiver a maior soma dos números escolhidos ao longo de suas rodadas.

Calcule, para cada um dos três jogadores, a probabilidade de que a ordem aleatória das bolas lhe garanta uma estratégia vencedora.

Solução:

