



Olimpíada Pernambucana de Matemática 2025

Segunda Fase - Nível 1 (6º e 7º anos)

CADERNO DE QUESTÕES



Nome completo do(a) aluno(a): _____.

Número da identidade: _____ Órgão Expedidor: _____.

Assinatura: _____.

LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.
02. Preencha os dados pessoais.
03. A prova é composta de 5 questões dissertativas: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos.
04. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.
05. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.
06. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.
07. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.
08. Se a Comissão considerar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.
09. Duração da prova: 4 horas.

Realização



UNIVERSIDADE
FEDERAL RURAL
DE PERNAMBUCO DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA

Apoio



stone



Acesse nosso site e nosso instagram:



www.opemat.com.br



www.instagram.com/opemat.ufrpe/

1. Na papelaria “*Escola Feliz*”, Dona Sônia vende materiais escolares apenas em pacotes fechados. Existem dois tipos de pacotes:

- Pacotes com Lápis contendo 5 unidades.
- Pacotes com Borrachas contendo 7 unidades.

As compras devem ser realizadas exclusivamente combinando quantidades inteiras desses pacotes. Uma compra é considerada impossível quando existem zero maneiras de realizá-la.

- É possível comprar exatamente 22 itens? Se sim, de quantas maneiras diferentes essa compra pode ser feita?
- É possível comprar exatamente 16 itens? Se sim, de quantas maneiras diferentes essa compra pode ser feita?
- Qual é a maior quantidade de itens que é impossível de comprar? Justifique sua resposta.

Solução:

2. Um grupo de 5 bailarinas veste camisetas numeradas de 1 até 5. No palco, existem 5 marcas no chão também numeradas de 1 até 5. Uma “*formação*” consiste em posicionar cada bailarina sobre uma marca, de modo que todas as marcas estejam ocupadas. Dizemos que uma bailarina está na *posição original* quando o número de sua camiseta é igual ao número da marca no chão.

- a) Considere apenas as 4 bailarinas numeradas de 1 até 4 e as marcas de 1 até 4. Quantas formações existem em que nenhuma bailarina esteja na sua posição original?
- b) Considere agora as 5 bailarinas. Quantas formações existem em que exatamente uma bailarina esteja na **posição original** e as outras quatro estejam fora da sua **posição original**?
- c) Considere novamente as 5 bailarinas. Chamamos de *caminhada* uma forma de reorganizar as bailarinas: Para cada marca X no chão é designada uma nova marca Y no chão (X pode ser igual a Y), de modo que a bailarina que estava sobre a marca X se movimentará para a marca Y .

Podemos representar uma caminhada por uma tabela de duas linhas: na primeira linha, temos as marcas de 1 a 5; na segunda linha, embaixo de cada marca X , há a marca Y para onde a bailarina da marca X se movimentou.

Por exemplo, a seguinte tabela

Início	1	2	3	4	5
Depois	2	1	3	4	5

indica que as bailarinas das marcas 1 e 2 trocaram de lugar, e as demais permaneceram onde estavam.

Uma caminhada é chamada de *espelhada* quando, começando com todas as bailarinas em suas posições originais e realizando a caminhada duas vezes seguidas, todas voltam às posições originais.

A caminhada acima é espelhada. Já a caminhada

Início	1	2	3	4	5
Depois	2	3	1	4	5

não é espelhada, pois, ao repeti-la, a bailarina 1 termina na marca 3, que não é sua posição original.

Quantas caminhadas espelhadas existem?

Solução:

3. Um tradicional bloco de carnaval de Pernambuco possui, em seu acervo inicial, 93 sombrinhas de frevo e 50 estandartes.

Para renovar e equilibrar o desfile, a diretoria utiliza um “Quiosque de Trocas” que trabalha segundo duas regras estritas:

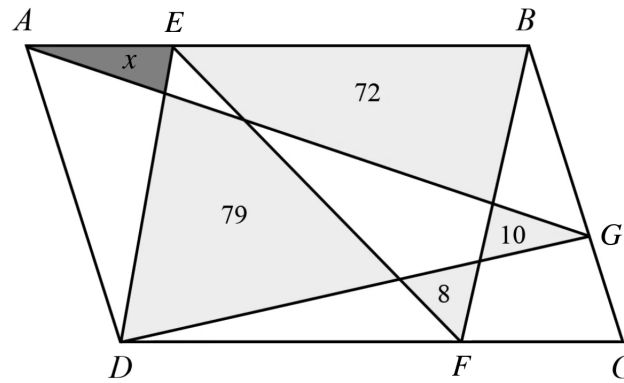
Regra 1. Entregar 5 sombrinhas para receber 3 estandartes.

Regra 2. Entregar 2 estandartes para receber 6 sombrinhas.

Determine se é possível, através de uma sucessão dessas operações, aumentar o número total de adereços do acervo em exatamente 10 unidades, de modo que, ao final, a quantidade de sombrinhas seja exatamente o dobro da quantidade de estandartes. Caso seja possível, indique quantas vezes cada regra de troca deve ser utilizada. Caso contrário, explique o porquê.

Solução:

4. Um grande vitral de uma igreja tem o formato de um paralelogramo $ABCD$, conforme a figura abaixo.



Por razões estruturais, engenheiros instalam cabos de aço no interior do painel, ligando vértices e pontos das bordas, exatamente como mostrado na figura. Todos os cabos são retilíneos, e seus pontos extremos pertencem aos lados do paralelogramo.

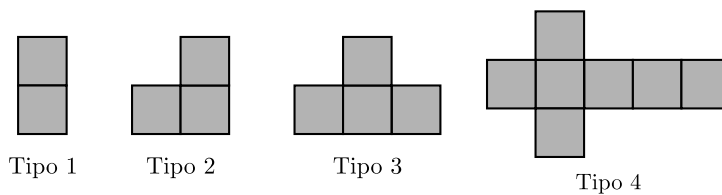
Esses cabos dividem o painel em várias regiões. As áreas de quatro dessas regiões (em metros quadrados) são conhecidas:

- (i) um painel central no formato de um quadrilátero com área 79;
- (ii) um painel superior no formato de um quadrilátero com área 72;
- (iii) dois pequenos painéis triangulares à direita, com áreas 10 e 8.

Próxima ao vértice superior esquerdo A , há um pequeno painel triangular (a região escura na figura), cuja área é desconhecida. Determine o valor x da área desconhecida.

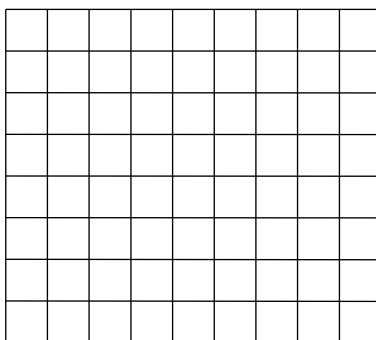
Solução:

5. O pai de Mateus recortou diversas peças de quatro tipos diferentes, todas compostas por quadrados unitários, conforme ilustrado abaixo. Considere que há um estoque ilimitado de cada tipo de peça e que todas podem ser rotacionadas ou refletidas.

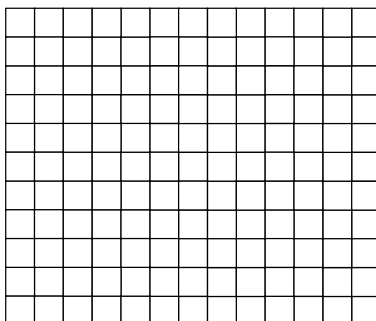


Mateus deve decidir se é possível cobrir perfeitamente (sem sobreposições ou espaços vazios) certos tabuleiros retangulares utilizando apenas alguns dos tipos de peças fornecidas. Determine se:

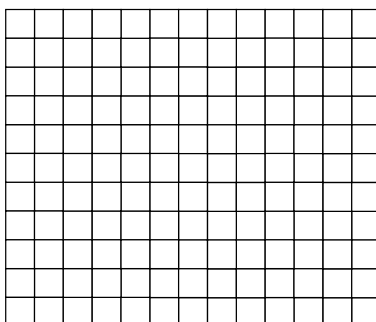
(a) é possível cobrir um tabuleiro 8×9 usando peças do tipo 2 e/ou 3?



(b) é possível cobrir um tabuleiro 11×13 usando peças do tipo 1 e/ou 3?



(c) é possível cobrir um tabuleiro 11×13 usando peças do tipo 1 e/ou 4?



Solução:

