



Olimpíada Pernambucana de Matemática 2025

Segunda Fase - Nível 3 (Ensino médio)

CADERNO DE SOLUÇÕES



Nome completo do(a) aluno(a): _____.

Número da identidade: _____ Órgão Expedidor: _____.

Assinatura: _____.

LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.
02. Preencha os dados pessoais.
03. A prova é composta de 5 questões dissertativas: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos.
04. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.
05. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.
06. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.
07. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.
08. Se a Comissão considerar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.
09. Duração da prova: 4 horas.

Realização



UNIVERSIDADE
FEDERAL RURAL
DE PERNAMBUCO DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA

Apoio



stone



Acesse nosso site e nosso instagram:



www.opemat.com.br



www.instagram.com/opemat.ufrpe/

1. O professor Rogério desafiou seus alunos a investigarem quais números inteiros positivos podem ser escritos como a diferença entre dois quadrados perfeitos. Ou seja, eles procuram números n que possuem solução para a equação:

$$n = a^2 - b^2$$

onde a e b são números inteiros.

Por exemplo, o número 5 pode ser escrito dessa forma, pois $5 = 3^2 - 2^2$. Já o número 9 pode ser escrito como $9 = 5^2 - 4^2$ e também como $9 = 3^2 - 0^2$.

- Encontre valores inteiros de a e b que mostrem que os números 13 e 20 podem ser escritos como a diferença entre dois quadrados perfeitos.
- O professor Rogério afirmou que o número 14 jamais poderia ser escrito como a diferença de dois quadrados de inteiros. Justifique matematicamente por que o número 14 não possui solução para esse problema.
- Prove que todo número ímpar maior que 1 pode ser escrito como a diferença entre dois quadrados perfeitos.

Solução:

- Para resolver $a^2 - b^2 = n$, usamos a fatoração $(a - b)(a + b) = n$.

Para o número 13: Como 13 é primo, seus únicos divisores positivos são 1 e 13. Montamos o sistema:

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 13 \end{cases}$$

Somando as duas equações: $2a = 14 \Rightarrow a = 7$. Substituindo o valor de a : $7 + b = 13 \Rightarrow b = 6$. Solução: $13 = 7^2 - 6^2$.

Para o número 20: Os pares de fatores de 20 são $(1, 20)$, $(2, 10)$ e $(4, 5)$. Para que a e b sejam inteiros, os fatores precisam ter a mesma paridade (ambos pares ou ambos ímpares). O único par que atende a isso é $(2, 10)$.

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 10 \end{cases}$$

Somando as equações: $2a = 12 \Rightarrow a = 6$. Substituindo o valor de a : $6 + b = 10 \Rightarrow b = 4$. Solução: $20 = 6^2 - 4^2$.

- Sabemos que $n = (a - b)(a + b)$. Sejam $x = a - b$ e $y = a + b$. A soma desses fatores é $x + y = (a - b) + (a + b) = 2a$. Como $2a$ é sempre par, a soma dos fatores x e y deve ser par. Isso só acontece se x e y forem ambos pares ou ambos ímpares.

Para o número 14, os pares de fatores são $(1, 14)$ e $(2, 7)$.

- No par $(1, 14)$, a soma é 15 (ímpar).
- No par $(2, 7)$, a soma é 9 (ímpar).

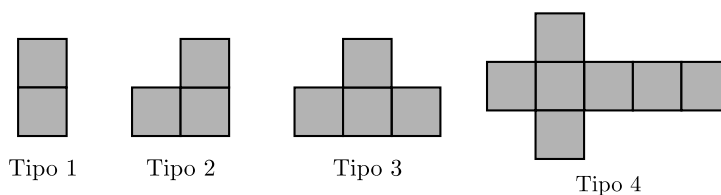
Como 14 não possui fatores com a mesma paridade, é impossível encontrar valores inteiros para a e b .

- Seja n um número ímpar qualquer maior que 1. Podemos escrever $n = 2k + 1$. Queremos mostrar que n é a diferença de dois quadrados consecutivos, ou seja, $(k + 1)^2 - k^2$. Desenvolvendo a expressão:

$$(k + 1)^2 - k^2 = (k^2 + 2k + 1) - k^2 = 2k + 1$$

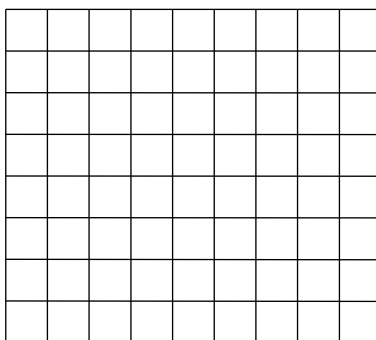
Como $2k + 1$ representa qualquer número ímpar, provamos que todo ímpar é a diferença dos quadrados de dois inteiros consecutivos.

2. O pai de Mateus recortou diversas peças de quatro tipos diferentes, todas compostas por quadrados unitários, conforme ilustrado abaixo. Considere que há um estoque ilimitado de cada tipo de peça e que todas podem ser rotacionadas ou refletidas.

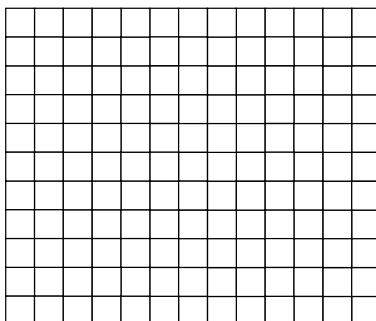


Mateus deve decidir se é possível cobrir perfeitamente (sem sobreposições ou espaços vazios) certos tabuleiros retangulares utilizando apenas alguns dos tipos de peças fornecidos. Determine se:

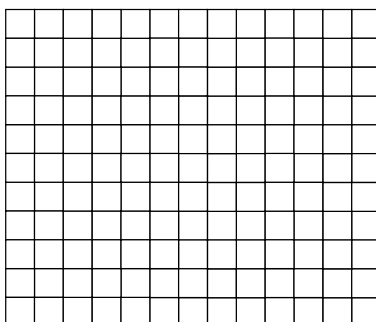
(a) é possível cobrir um tabuleiro 8×9 usando peças do tipo 2 e/ou 3?



(b) é possível cobrir um tabuleiro 11×13 usando peças do tipo 1 e/ou 3?

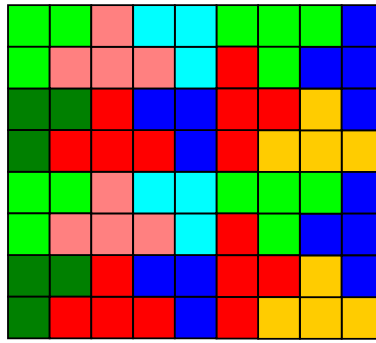


(c) é possível cobrir um tabuleiro 11×13 usando peças do tipo 1 e/ou 4?



Solução:

(a) Sim



- (b) Não. Observe que o total de casas do tabuleiro é um número ímpar e tanto as peças do Tipo 1 como as peças do Tipo 3 possuem uma quantidade par de quadrados, ao utilizar várias dessas peças, elas sempre vão cobrir um número par de casas.
- (c) Não. Utilizando a coloração de um tabuleiro de xadrez atribua o valor 1 para cada casa escura e o valor -1 para cada casa clara.

Supondo que a casa que fica no canto esquerdo superior é escura, o tabuleiro possui 72 casas escuras e 71 casas claras. Portanto, a soma dos valores de todas as casas deste tabuleiro é

$$72 \cdot (+1) + 71 \cdot (-1) = 1.$$

Analisando a soma dos valores que cada peça pode cobrir, observamos que

- Uma peça do Tipo 1 cobre uma casa branca $(+1)$ e uma casa preta (-1) . O valor dessa cobertura é $(-1) + (+1) = 0$.
- Uma peça do Tipo 4 pode cobrir 5 casas pretas e 2 brancas. O valor dessa cobertura é 3.
- Uma peça do Tipo 4 pode cobrir 5 casas brancas e 2 casas pretas. O valor dessa cobertura é -3 .

Seja P_1 o número de peças do Tipo 1. Seja $P_{(4,3)}$ o número de peças do Tipo 4 com valor da cobertura igual a 3. Seja $P_{(4,-3)}$ o número de peças do Tipo 4 com valor da cobertura igual a -3 . Para que a cobertura seja possível é necessário que a seguinte equação admita solução nos inteiros não negativos:

$$0 \cdot P_1 + 3 \cdot P_{(4,3)} + (-3) \cdot P_{(4,-3)} = 1,$$

ou seja, $P_{(4,3)} - P_{(4,-3)} = \frac{1}{3}$ precisa admitir solução com $P_{(4,3)}$ e $P_{(4,-3)}$ inteiros, o que é um absurdo.

3. Em um triângulo ABC , sejam P, Q os pés das bissetrizes interna e externa relativas ao ângulo $\angle ABC$, e seja K a projeção de C em AB . Mostre que AK é bissetriz de $\angle PKQ$.

Solução: Pelos Teoremas das Bissetrizes Interna e Externa, sabemos que

$$\frac{AQ}{CQ} = \frac{AB}{CB} = \frac{AP}{CP},$$

e então segue que os pontos A, C, P, Q formam uma quádrupla harmônica.

Pelo Círculo de Apolônio, sabemos que o lugar geométrico dos pontos X que satisfazem

$$\frac{XP}{XQ} = \frac{AP}{AQ}$$

é um círculo de diâmetro AC .

Portanto, como K pertence a esse círculo, já que

$$\angle AKC = 90^\circ,$$

segue que

$$\frac{KP}{KQ} = \frac{AP}{AQ}.$$

Assim, pela volta do Teorema das Bissetrizes Interna e Externa, concluímos que AK é bissetriz de $\angle PKQ$ (podendo ser tanto interna quanto externa).

4. Durante uma aula de curvas no plano, o professor propôs um desafio envolvendo o movimento de uma partícula sujeita a forças externas. Ao tentar resolver a equação que modelava o instante em que a partícula muda de direção, os alunos chegaram a uma equação cúbica da forma:

$$x^3 + x + 1 = 0.$$

O professor explicou que essa equação possui apenas uma raiz real, e que ela pode ser expressa de uma forma irredutível da seguinte maneira:

$$\sqrt[3]{A + \frac{1}{2}\sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \frac{1}{2}\sqrt{B}},$$

onde A e B são números racionais com $B > 0$.

Com base nesse modelo de solução e na forma da raiz real da equação dada, responda os seguintes itens:

(a) Prove que é possível escolher a e b números reais tais que

(i) $x = a + b$ é raiz de $x^3 + x + 1 = 0$;

(ii) a^3 e b^3 são raízes de $y^2 + y - \frac{1}{27} = 0$.

(b) Calcule o valor de B .

Solução:

(a) Considere a equação polinomial do terceiro grau $x^3 + x + 1 = 0$. Como a equação acima possui uma única raiz real então seja $x = a + b$ sua raiz real, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Assim,

$$\begin{aligned} x^3 &= (a + b)^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &= 3ab(a + b) + a^3 + b^3 \\ &= 3ab \cdot x + a^3 + b^3 \implies \\ x^3 - 3ab \cdot x - (a^3 + b^3) &= 0 \end{aligned}$$

Comparando com a equação inicial, é possível concluir que $3ab = -1$ e $a^3 + b^3 = -1$. Consequentemente,

$$a^3b^3 = -\frac{1}{27} \quad \text{e} \quad a^3 + b^3 = -1.$$

Seja $y^2 + y - \frac{1}{27} = 0$ uma equação do segundo grau cujas raízes são a^3 e b^3 .

(b) O discriminante Δ da equação em y é $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{-1}{27} = 1 + \frac{4}{27} = \frac{27 \cdot 1 + 4}{27} = \frac{31}{27}$.

Logo, $a^3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{27}}$ e $b^3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{27}}$.

Portanto,

$$x = a + b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{27}}},$$

e o valor procurado é $B = \frac{31}{27}$.

5. Em um quadro estão escritos n números reais (não necessariamente distintos) com soma positiva. Uma operação permitida é escolher dois números do quadro, apagá-los, e escrever no quadro *duas cópias* da média aritmética entre eles (de modo que, após a operação, ainda haja n números escritos no quadro). Mostre que, após um número finito de operações, é possível que todos os números escritos no quadro sejam positivos.

Solução: Vamos criar um algoritmo para resolver este problema.

Algoritmo

Após N operações, sejam a_N, b_N os maiores e menores valores escritos no quadro, respectivamente. Então escolha um número de valor a_N , um de valor b_N , e opere neles.

Afirmo que essa estratégia funciona. A prova será dividida em duas partes.

Parte 1

Vamos mostrar que os números vão ficando cada vez mais próximos ao decorrer do algoritmo. Mais precisamente, mostremos que, para qualquer real $r > 0$, existe um momento N tal que

$$a_N - b_N < r.$$

Antes de qualquer movimento, chame os números do quadro de x_1, \dots, x_n e, na reta real, coloque marcadores P_1, \dots, P_n nos pontos x_1, \dots, x_n . Ao realizar um movimento com os números correspondentes aos marcadores P_i e P_j , mova esses marcadores para o ponto médio deles.

Queremos mostrar que a distância entre quaisquer dois marcadores torna-se muito pequena.

Note que

$$b_0 \leq b_1 \leq \dots, \quad a_0 \geq a_1 \geq \dots.$$

Se definirmos $c_N = a_N - b_N$, temos

$$c_0 \geq c_1 \geq \dots.$$

Lema 1. *Se o marcador P_i foi operado na operação N (junto com algum outro marcador), então, no momento N , ele está a uma distância de, no máximo, $c_{N-1}/2$ de todos os outros marcadores.*

Demonstração. Como todo marcador P corresponde a um número no intervalo $[b_{N-1}, a_{N-1}]$, todo marcador P está a uma distância de, no máximo, $c_{N-1}/2$ do número

$$\frac{a_{N-1} + b_{N-1}}{2}.$$

Logo, como P_i será posicionado em $(a_{N-1} + b_{N-1})/2$ após a N -ésima operação, o lema está provado. \square

Lema 2. *Se o marcador P_i foi operado na operação N , então, para todo momento $M \geq N$, ele está a uma distância de, no máximo, $c_{N-1}/2$ de qualquer outro marcador.*

Demonstração. Aplicamos indução em $M \geq N$. O caso base $M = N$ foi feito no Lema 1.

Suponha que isso seja válido no momento $M - 1 \geq N$, e provemos que vale no momento M .

Suponha que P_r e P_s sejam os marcadores operados na operação M . Se P_i está entre eles, use o Lema 1 e o fato de que $c_{M-1} \leq c_{N-1}$. Caso contrário, a distância de P_i a qualquer marcador diferente de P_r, P_s se manteve após a operação M , e então continua sendo $\leq c_{N-1}/2$.

Para os marcadores P_r e P_s , pelo Lema 1, sabemos que eles estão a uma distância de no máximo $c_{M-1}/2 \leq c_{N-1}/2$ de todos os outros marcadores, e então, em particular, de P_i .

Isso conclui o passo indutivo e prova o lema. \square

Para terminar esta parte, note que há um marcador P que é operado infinitas vezes, suponha que nas operações

$$N_1 < N_2 < \dots.$$

Então

$$c_{N_{i+1}-1} \leq \frac{c_{N_i-1}}{2},$$

pois, após a operação N_i , P está a uma distância de, no máximo, $c_{N_i-1}/2$ de qualquer outro marcador pelo Lema 2.

Daí,

$$c_{N_k-1} \leq c_{N_1-1} \cdot 2^{1-k}.$$

Assim, após a N_k -ésima operação, a distância entre dois marcadores R, S é, no máximo, a soma das distâncias desses marcadores ao marcador P , e portanto é no máximo

$$2 \cdot c_{N_1-1} \cdot 2^{1-k},$$

que pode ser tornado arbitrariamente pequeno para k suficientemente grande.

Parte 2

Agora, note que há um invariante no problema: a soma dos números do quadro é sempre fixa. Assim, a média deles também é fixa, pois há sempre n números escritos.

Seja $m > 0$ essa média. Tome N tal que

$$a_N - b_N < \frac{m}{2}.$$

É claro que $a_N \geq m$, pois a_N é o maior valor do quadro.

Logo,

$$b_N > a_N - \frac{m}{2} > 0.$$

Como b_N é o menor valor escrito no quadro, concluímos que, no N -ésimo momento, todos os números são positivos, como desejado.

Prova Alternativa do Algoritmo

Defina m como a média dos números escritos no quadro. Esse número é constante.

Agora, defina a função

$$f(N) = \sum_{x \in Q_N} |x - m|,$$

onde Q_N é o multiconjunto dos números escritos no quadro após N operações.

Lema 3.

$$f(N) - f(N+1) = 2 \min(|a_N - m|, |b_N - m|).$$

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que

$$|a_N - m| = a_N - m \geq m - b_N = |b_N - m|.$$

Ao operar em a_N, b_N , trocamos ambos por $(a_N + b_N)/2 \geq m$, e como os outros números permanecem inalterados,

$$\begin{aligned} f(N) - f(N+1) &= |a_N - m| + |b_N - m| + 2m - a_N - b_N \\ &= 2(m - b_N) \\ &= 2 \min(|a_N - m|, |b_N - m|), \end{aligned}$$

como desejado. □

Com isso, podemos provar que $f(N)$ fica arbitrariamente pequeno quando N é grande, pois, caso contrário, existiria sempre um número a uma distância σ de m , implicando

$$\min(|a_N - m|, |b_N - m|) \geq \frac{\sigma}{n},$$

e então f decresceria indefinidamente, o que é impossível pois $f(N) \geq 0$ para todo N .