# Olimpíada Pernambucana de Matemática 2025

## Primeira Fase - Nível 3 (Ensino Médio)

## CADERNO DE SOLUÇÕES

**1.** Na cozinha da vovó, há 12 potes coloridos de bombons, todos distintos:

- 7 potes azuis com quantidade par de bombons,
- 5 potes vermelhos com quantidade ímpar de bombons.

João e Maria querem escolher 3 potes para dividir igualmente entre eles. Para que a divisão seja justa, o total de bombons dos 3 potes deve ser um número par (assim, cada um recebe metade exata, sem sobra de bombons).

De quantas maneiras distintas eles podem escolher os 3 potes?

**(A)** 35

**(B)** 45

**(C)** 70

**(D)** 90

**(E)** 105

**Solução:** No caso (i), há 7 modos de se escolher o primeiro pote, 6 modos de escolher o segundo pote e 5 modos de escolher o terceiro pote. Assim, existem $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ modos de se escolher 3 potes azuis. Note, porém, que cada escolha distinta foi contada 6 vezes nesse processo. Com efeito, suponha deseja-se escolher os potes $P_1$, $P_2$ e $P_3$. Tal escolha poderia ser obtida de 6 modos: $(P_1, P_2, P_3)$, $(P_1, P_3, P_2)$, $(P_2, P_1, P_3)$, $(P_2, P_3, P_1)$, $(P_3, P_1, P_2)$ e $(P_3, P_2, P_1)$. Assim, devemos dividir o valor obtido anteriormente por 6, obtendo assim $210/6 = 35$ modos distintos de se escolher 3 potes azuis.

No caso (ii), temos $5 \cdot 4 = 20$ modos de se escolher os potes vermelhos. Por um raciocínio análogo, cada escolha distinta de dois potes vermelhos foi contada 2 vezes. Assim, devemos dividir o valor obtido anteriormente por 2 obtendo assim $20/2 = 10$ modos distintos de escolher se 2 potes vermelhos. Feita essa escolha, há 7 modos de se escolher o pote azul. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $10 \cdot 7 = 70$ modos de escolhermos 2 potes vermelhos e um azul.

Como dividimos o problema em casos, segue, pelo princípio aditivo, que há $35 + 70 = 105$ maneiras de se escolher 3 potes de modo que o total de biscoitos seja par. Assim, a alternativa correta é a letra (E).

**2.** Considere a soma

$$S = 1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 7 - 8 + 9 + 10 + 11 - 12 + \cdots + \\ + 397 + 398 + 399 - 400.$$

Assinale a alternativa que corresponde ao valor de $S$.

**(A)** 39.800

**(B)** 60.000

**(C)** 70.100

**(D)** 75.150

**(E)** 80.200

**Solução:** Para $n$ natural, defina

$$a_n = (4n - 3) + (4n - 2) + (4n - 1) - (4n).$$

Então,

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}.$$

Além disso, podemos reescrever $a_n$ como

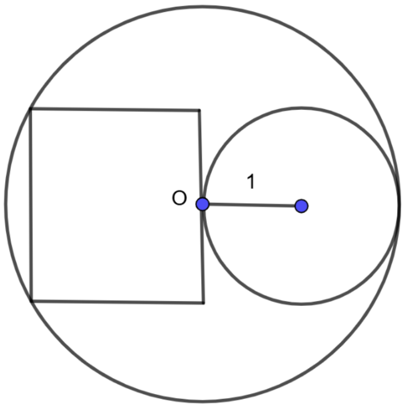
$$a_n = 8n - 6 = 2 + 8n - 8 = 2 + 8(n - 1).$$

Assim, $(a_n)$ define uma progressão aritmética de termo inicial $a_1 = 2$ e razão $r = 8$. Logo,

$$S = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(2 + 794) \cdot 100}{2} = 39.800.$$

Assim, a alternativa correta é a letra (A).

**3.** Considere um quadrado com dois de seus vértices pertencentes a uma circunferência de centro no ponto $O$.
Uma circunferência menor de raio 1 é tangente a um dos lados do quadrado em $O$ e tangente à circunferência maior, conforme ilustra a figura abaixo.




Assinale a alternativa que corresponde à área do quadrado.

**(A)** $\frac{16}{5}$

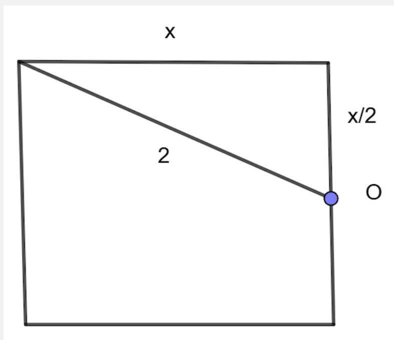
**(B)** 4

**(C)** $\frac{9}{4}$

**(D)** 1

**(E)** 5

**Solução:** Seja $x$ o lado do quadrado. Observe a configuração abaixo:




Usando o Teorema de Pitágora, temos

$$\begin{aligned} 2^2 &= x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ 4 &= x^2 + \frac{x^2}{4} \\ 4 &= \frac{5x^2}{4} \\ x^2 &= \frac{16}{5}. \end{aligned}$$

Logo, a área do quadrado é $\frac{16}{5}$ e portanto a alternativa correta é a letra $(A)$.

**4.** Um número natural $n$ entre 901 e 1018 possui 3 divisores. Assinale a alternativa que corresponde à soma dos dígitos de $n$:

**(A)** 15

**(B)** 16

**(C)** 17

**(D)** 18

**(E)** 19

**Solução:** Considerando que se a fatoração de $n$ é

$$n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k},$$

então o número de divisores é dado por

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1)$$

então se $n$ tem 3 divisores, ele so pode ter um fator primo na decomposição e o expoente deve ser 2, isto é, $n = p^2$, onde $p$ é primo. O único primo $p$ que satisfaz as condições do enunciado é $p = 31$ e, consequentemente, $n = 31^2 = 961$ cuja soma dos dígitos é 16. Portanto, a alternativa correta é a letra (B).

**5.** Seja $A(x)$ uma expressão algébrica satisfazendo $A(0) \geq 0$ tal que a equação

$$x^2 + x + 1 = \frac{3}{4}([A(x)]^2 + 1)$$

é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de $A(x+1) - A(x)$.

**(A)** $\frac{3}{4}$

**(B)** $x$

**(C)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$

**(D)** $0$

**(E)** $\sqrt{3}$

**Solução:** A equação dada pode ser reescrita como

$$x^2 + x + 1 = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right].$$

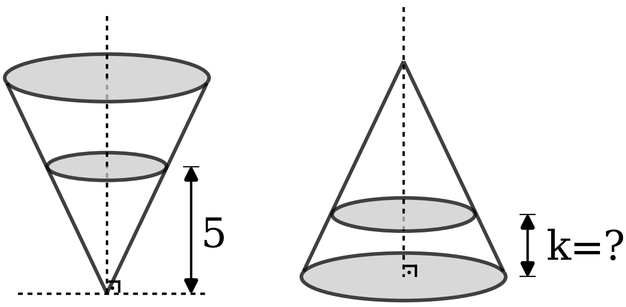
Assim,

$$A(x) = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{ou} \quad A(x) = -\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Como $A(0) \geq 0$, então $A(x) = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$. Logo, $A(x+1) - A(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Portanto, a alternativa correta é a letra (C).

**6.** Em um laboratório, um recipiente em forma de cone circular reto, com raio da base medindo 4 unidades de comprimento e altura de 10 unidades, é utilizado para medir volumes de líquidos.

Um pesquisador o preenche com um certo volume de água e o coloca sobre uma mesa plana na **Configuração A** (Figura 1), conforme ilustra a figura abaixo, medindo a altura do cone de água que se formou dentro do recipiente. Em seguida, ele inverte o recipiente, e o coloca novamente sobre a mesa na **Configuração B** (Figura 2).




1. Configuração A 2. Configuração B

Admitindo que o volume do cone de água no recipiente é o mesmo em ambas as configurações, assinale a alternativa que corresponde à altura $k$ do cone de água na **Configuração B**.

**(A)** $10 - 5\sqrt{2}$

**(B)** $10 - 5\sqrt[3]{2}$

**(C)** $10 - 5\sqrt[3]{5}$

**(D)** $10 - 5\sqrt[3]{7}$

**(E)** $10 - \sqrt[3]{7}$

**Solução:** Usando semelhança de triângulos na primeira figura, segue que o raio do cone formado pela água é 2. Seja $V_C$ o volume do cone reto e seja $V_A$ o volume de água no cone. Usando os conceitos da geometria espacial, concluimos que

$$V_C = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = \frac{160\pi}{3}$$

e

$$V_A = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = \frac{20\pi}{3}.$$

Para evitar usar a fórmula do tronco de cone que é mais complexa, usaremos o volume complementar que é $V_C - V_A = \frac{160\pi}{3} - \frac{20\pi}{3} = \frac{140\pi}{3}$. Aqui novamente usando semelhança de triângulo na segunda figura, segue que o raio menor $r$ do tronco de cone em função de $k$ é

$$r = \frac{20 - 2k}{5}.$$

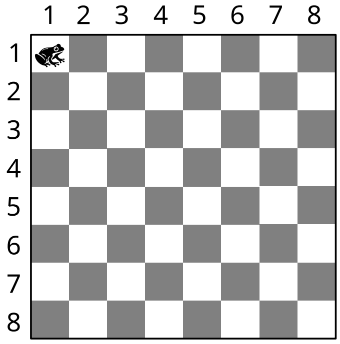
**Solução:** **(Continuação)** Além disso, a altura desse cone menor na segunda figura é $h = 10 - k$.

Usando novamente a fórmula do cone na segunda figura, temos

$$\begin{aligned}
\frac{140\pi}{3} &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{20-2k}{5}\right)^2 \cdot (10-k) \\
140 &= 4 \cdot \frac{(10-k)^2}{25} \cdot (10-k) \\
(10-k)^3 &= 35 \cdot 25 = 5^3 \cdot 7 \\
10-k &= 5\sqrt[3]{7} \\
k &= 10 - 5\sqrt[3]{7}.
\end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra $(D)$.

**7.** Considere um tabuleiro $8 \times 8$ pintado, conforme a figura abaixo, e denote pelo par ordenado $(i, j)$ a casa que está na $i$-ésima linha e $j$-ésima coluna do tabuleiro.




Um **sapo robô** está inicialmente na posição $(1, 1)$. Ele só pode realizar saltos de exatamente 1 ou 3 casas, sempre dentro do tabuleiro. No primeiro salto, o sapo deve se mover ao longo da linha em que se encontra. No segundo salto, ele deve se mover ao longo da coluna. Nos saltos seguintes, ele deve alternar sempre entre linha e coluna.

Por exemplo, a partir da posição inicial $(1, 1)$, o sapo pode ir para as casas $(1, 2)$ ou $(1, 4)$ no primeiro salto. Após 2025 saltos, o que podemos afirmar?

**(A)** O sapo pode terminar na casa (6,3).

**(B)** O sapo pode terminar na casa (5,7).

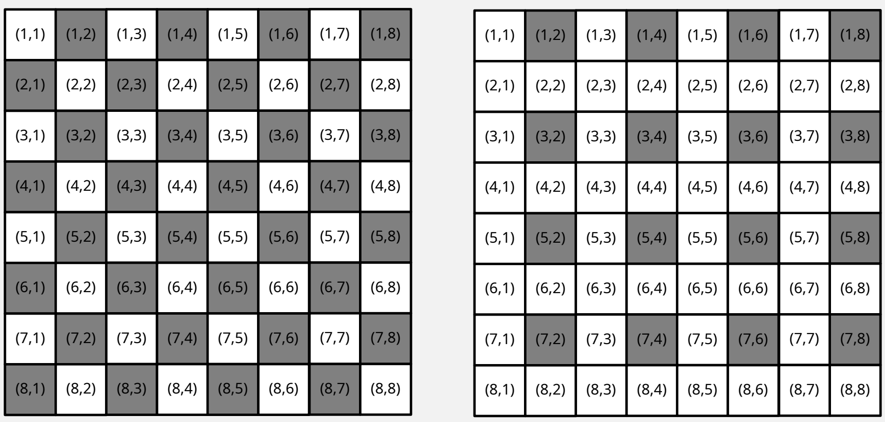
**(C)** O sapo pode terminar na casa (7,4).

**(D)** O sapo pode terminar na casa (4,5).

**(E)** Nenhuma das anteriores.

**Solução:** Note que no primeiro salto o sapo muda a coluna para uma posição par. No terceiro salto, ele volta para uma coluna ímpar. No quarto salto, continua em uma coluna ímpar, mas no quinto salto a coluna se torna novamente par. Assim, temos um ciclo de quatro saltos: a cada quatro movimentos, a coluna termina em uma posição ímpar, e no salto seguinte ela passa para uma posição par. Como $2025 = 4 \cdot 506 + 1$, após 2024 saltos a coluna estará em uma posição ímpar. Portanto, no salto de número 2025, a coluna será par. Com a mesma ideia, observamos que a cada quatro saltos a linha retorna para uma posição ímpar, e o próximo salto acontece justamente ao longo da linha.

Logo, após 2025 saltos, concluímos que a coluna será par e a linha será ímpar. Portanto, os itens **(A)**, **(B)** e **(D)** são falsos.



**Solução:** **(Continuação)** Vamos mostrar que o item **(C)** é verdadeiro. Após os 13 passos:

$$(1,1) \to (1,2) \to (2,2) \to (2,3) \to (3,3) \to (3,2) \to (4,2) \to$$
$$\to (4,3) \to (5,3) \to (5,2) \to (6,2) \to (6,3) \to (7,3) \to (7,4)$$

o sapo se encontra na casa (7,4). Ainda faltam 2012 saltos. O sapo pode repetir 503 vezes a sequência de tamanho 4:

$$(7,4) \to (6,4) \to (6,3) \to (7,3) \to (7,4)$$

Totalizando 2025 saltos e terminando na casa (7,4). Portanto, a alternativa correta é a letra (C).

**8.** Durante uma feira de ciências, os organizadores montaram um painel interativo com cartões contendo todos os divisores positivos de $2025^2$. Cada cartão contém um único divisor e cada divisor foi escrito em apenas um cartão. Três visitantes escolhem, sem reposição, um cartão cada um. Seja

$$P = \frac{m}{n},$$

com $m$ e $n$ primos entre si, a probabilidade de que entre os três números escolhidos, haja exatamente um número **primo** e dois **quadrados perfeitos**.

Assinale a alternativa que corresponde à soma $m + n$.

**(A)** 48

**(B)** 480

**(C)** 2.028

**(D)** 2.943

**(E)** 14.400

**Solução:** Fatoramos

$$2025 = 3^4 \cdot 5^2 \quad \Longrightarrow \quad 2025^2 = 3^8 \cdot 5^4.$$

Logo, o número total de divisores é

$$\tau(2025^2) = (8+1)(4+1) = 9 \cdot 5 = 45.$$

Um divisor é quadrado perfeito se os expoentes de 3 e 5 forem pares. Para 3: $0, 2, 4, 6, 8$ (5 opções); para 5: $0, 2, 4$ (3 opções). Assim, há $5 \cdot 3 = 15$ divisores quadrados perfeitos.

Os únicos divisores primos de $2025^2$ são 3 e 5, portanto existem 2.

O número total de formas de escolher três divisores distintos é

$$\binom{45}{3} = 14190.$$

Precisamos de exatamente 1 primo e 2 quadrados perfeitos:

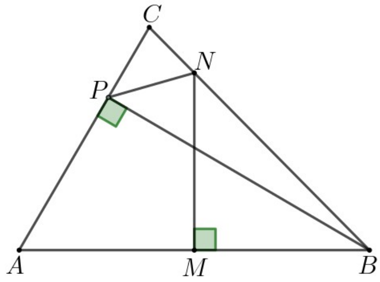
$$2 \cdot \binom{15}{2} = 2 \cdot 105 = 210.$$

Daí, a probabilidade é dada por:

$$p = \frac{210}{14190} = \frac{7}{473}.$$

Portanto, $m + n = 7 + 473 = 480$ e a alternativa correta é a letra (B).

**9.** Na figura abaixo, $M$ é ponto médio do segmento $AB$.




Sabendo que $\widehat{PBC} = 15^o$ e $\widehat{ABP} = 30^o$, assinale a alternativa que corresponde à medida de $\widehat{PNM}$.

**(A)** $60^o$

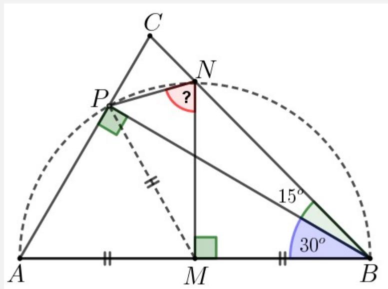
**(B)** $65^o$

**(C)** $72^o$

**(D)** $74^o$

**(E)** $75^o$

**Solução:** Trace o segmento $PM$. Como os pontos $A$ $P$ e $B$, estão sobre uma circunferência e $M$ é ponto médio de $AB$, segue que $PM = AM = MB$. Veja figura abaixo.




Como o triângulo $\triangle APB$ é reto em $P$ e $\widehat{ABP} = 30^o$, segue que $\widehat{BAP} = 60^o$. Daí, segue que o triângulo $\triangle AMP$ que é isósceles de base $AP$, é equilátero. Portanto, $\widehat{AMP} = 60^o$ e $\widehat{PMN} = 30^o$.

Por outra parte, como $\widehat{MBN} = 45^o$, segue que $\widehat{MNB} = 45^o$. Logo o triângulo $\triangle NMB$ é retângulo isósceles de base $BN$, portanto $MB = MN$. Assim, $PN = NM$ e de $\widehat{PMN} = 30^o$, segue que $\widehat{PNM} = 75^o$.

Portanto, a alternativa correta é (E).

**10.** Seja $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz equação

$$f(\arctan(x)) = \frac{1}{x^2+1},$$

para todo $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Se

$$y = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \text{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

assinale a alternativa que corresponde ao valor de $f(y)$.

**(A)** $1$

**(B)** $\frac{4}{5}$

**(C)** $\frac{16}{25}$

**(C)** $\frac{1}{5}$

**(D)** $\frac{\pi}{2}$

**Solução:** Seja $y = arctgx$, consequentemente,

$$\begin{aligned} tgy &= x \implies tg^2y + 1 = x^2 + 1 \implies \frac{1}{tg^2y+1} = \frac{1}{x^2+1} \implies \\ \frac{1}{sec^2y} &= \frac{1}{x^2+1} \implies cos^2y = \frac{1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Logo, $f(y) = cos^2y$, onde $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Assim,

$$f(arccosx - arcsenx) = [cos(arccosx - arcsenx)]^2.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} f(arccosx - arcsenx) &= [cos(arccosx - arcsenx)]^2 \\ &= [cos(arccosx) \cdot cos(arcsenx) + sen(arccosx) \cdot sen(arcsenx)]^2 \\ &= [x \cdot cos(arcsenx) + sen(arccosx) \cdot x]^2, \end{aligned}$$

já que $cos(arccosx) = x$ e $sen(arcsenx) = x$.

O primeiro passo é calcular $cos(arcsenx)$. Seja $z = arcsenx$ e consequentemente, $senz = x$. Daí,

$$senz = x \implies sen^2z = x^2 \implies 1 - cos^2z = x^2 \implies cosz = \sqrt{1-x^2}.$$

Logo, $cos(arcsenx) = cosz = \sqrt{1-x^2}$. Usando o mesmo raciocínio acima, concluimos também que $sen(arccosx) = \sqrt{1-x^2}$.

**Solução:** **(Continuação)** Assim,

$$\begin{aligned} f(|arccos x - arcsen x|) &= \left[x \cdot \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \cdot x\right]^2 \\ &= \left[2x \cdot \sqrt{1-x^2}\right]^2 \\ &= 4x^2 \cdot (1-x^2). \end{aligned}$$

Faça $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
Logo,

$$\begin{aligned} f\left(arccos\frac{1}{\sqrt{5}} - arcsen\frac{1}{\sqrt{5}}\right) &= 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\right] \\ &= 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{16}{25}. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra $(C)$.

**11.** Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é dita **multiplicativa** se $f(1) = 1$ e

$$f(pq) = f(p)f(q)$$

para todos $p$ e $q$ coprimos.

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função multiplicativa tal que

$$f(p^k) = p^{k-1}(p+1)$$

para todo primo $p$ e $k \geq 1$.

Assinale a alternativa que corresponde à quantidade de números naturais $n$ que possuem exatamente quatro divisores e satisfazem $f(n) = 540$.

**(A)** 0

**(B)** 1

**(C)** 2

**(D)** 3

**(E)** 4

**Solução:** Fatoramos

$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5.$$

Se $n$ tem exatamente quatro divisores, então $n = p^3$ (com $p$ primo) ou $n = pq$ (com $p \neq q$ primos).

*Caso 1: $n = p^3$.*

$$f(p^3) = p^2(p+1) = 540.$$

Testando $p = 2, 3, 5, 7, 11$ obtemos $12, 36, 150, 392, 1452$, nenhum igual a 540. observando que se $p < q$ então $f(p^3) < f(q^3)$ nenhum valor de $p$ maior do que 11 pode ser solução.

*Caso 2: $n = pq$ com $p \neq q$ primos.* Como $f$ é multiplicativa e $f(p) = p + 1$,

$$f(pq) = (p+1)(q+1) = 540.$$

Ponha $a = p+1$, $b = q+1$. Precisamos de $ab = 540$ com $a-1$ e $b-1$ primos. Os pares ordenados $(a, b)$ com $ab = 540$ (e $a \leq b$) são

$$(1, 540), (2, 270), (3, 180), (4, 135), (5, 108), (6, 90),$$
$$(9, 60), (10, 54), (12, 45), (15, 36), (18, 30), (20, 27).$$

Verificando:

| $a$ | $b$ | $a-1$ | $b-1$ | Ambos primos? |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 540 | 0 (não é primo) | 539 (comp.) | Não |
| 2 | 270 | 1 (não é primo) | 269 (primo) | Não |
| 3 | 180 | 2 (primo) | 179 (primo) | **Sim** |
| 4 | 135 | 3 (primo) | 134 (comp.) | Não |
| 5 | 108 | 4 (comp.) | 107 (primo) | Não |
| 6 | 90 | 5 (primo) | 89 (primo) | **Sim** |
| 9 | 60 | 8 (comp.) | 59 (primo) | Não |
| 10 | 54 | 9 (comp.) | 53 (primo) | Não |
| 12 | 45 | 11 (primo) | 44 (comp.) | Não |
| 15 | 36 | 14 (comp.) | 35 (comp.) | Não |
| 18 | 30 | 17 (primo) | 29 (primo) | **Sim** |
| 20 | 27 | 19 (primo) | 26 (comp.) | Não |

**Solução:** **(Continuação:)** Observando a tabela, surgem exatamente três valores

$$n = (a-1)(b-1) \in \{2 \cdot 179,\ 5 \cdot 89,\ 17 \cdot 29\} = \{358, 445, 493\},$$

todos com quatro divisores (produto de dois primos distintos).

Concluímos que a quantidade pedida é 3. Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

**12.** Dois amigos, Pedro e João, disputaram várias partidas de Jogo da Velha, atribuindo-se 1 ponto ao vencedor de cada partida. Ao final, Pedro venceu João por 6 a 4.

De quantas maneiras distintas esse placar pode ser obtido, sabendo que, ao longo da disputa, Pedro nunca esteve atrás no número de pontos ?

**(A)** 42

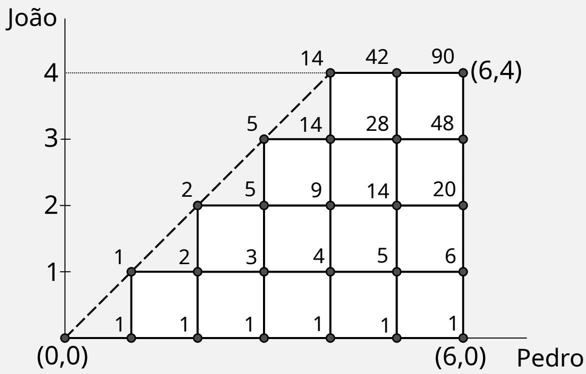
**(B)** 45

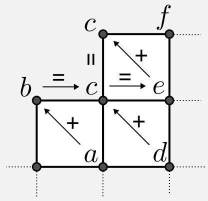
**(C)** 48

**(D)** 60

**(E)** 90

**Solução:** Considere o diagrama a seguir.



$$\begin{cases} c = a + b \\ e = d + c \\ f = e + c \end{cases}$$

As coordenadas de cada ponto representam uma possível situação de placar, enquanto o número associado a esse ponto indica a quantidade de caminhos possíveis para alcançá-lo a partir de $(0, 0)$, obedecendo às regras definidas no enunciado.

Note que, na linha $y = 0$, cada ponto está associado ao número 1, pois existe apenas uma maneira de chegar a eles: avançando apenas no eixo $x$.

Para determinar o número de caminhos até os demais pontos, utilizamos o esquema apresentado à direita da figura. Por exemplo, para um ponto associado a $c$ caminhos, podemos alcançá-lo de duas formas: vindo do ponto imediatamente anterior no eixo $x$, que possui $a$ caminhos, ou do ponto imediatamente anterior no eixo $y$, que possui $b$ caminhos. Assim,

$$c = a + b.$$

Seguindo essa regra de cálculo, encontramos que o ponto de coordenadas $(6, 4)$ — que corresponde à pontuação de 6 para Pedro e 4 para João — está associado a 90 caminhos distintos. Portanto, a alternativa correta é a letra (E).

## Gabarito - Nível 3

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | **A** | **A** | A | A | A | A | A | A | A | A | A |
| B | B | B | **B** | B | B | B | **B** | B | B | B | B |
| C | C | C | C | **C** | C | **C** | C | C | **C** | C | C |
| D | D | D | D | D | **D** | D | D | D | D | **D** | D |
| **E** | E | E | E | E | E | E | E | **E** | E | E | E |