



Olimpíada Pernambucana de Matemática 2025

Segunda Fase - Nível 2 (8º e 9º anos)

CADERNO DE SOLUÇÕES



Nome completo do(a) aluno(a): _____.

Número da identidade: _____ Órgão Expedidor: _____.

Assinatura: _____.

LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.
02. Preencha os dados pessoais.
03. A prova é composta de 5 questões dissertativas: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos.
04. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.
05. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.
06. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.
07. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.
08. Se a Comissão considerar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.
09. Duração da prova: 4 horas.

Realização



UNIVERSIDADE
FEDERAL RURAL
DE PERNAMBUCO DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA

Apoio



stone



Acesse nosso site e nosso instagram:



www.opemat.com.br



www.instagram.com/opemat.ufrpe/

1. As formigas Ana e Bia estão construindo formigueiros seguindo regras matemáticas diferentes:

- Ana cria um formigueiro com **camadas** horizontais. A 1ª camada tem 1 câmara. Cada nova camada tem 2 câmaras a mais do que a anterior. Assim, a primeira tem 1 câmara, a segunda tem 3, a terceira tem 5 e assim por diante.
- Bia cria um formigueiro cavando em **níveis** verticais de cima para baixo. O 1º nível tem 1 câmara. Cada novo nível tem o dobro de câmaras do nível anterior. Assim, o primeiro nível tem 1 câmara, o segundo tem 2, o terceiro tem 4 e assim por diante.

- a) Quantas câmaras terá a 6ª camada de Ana? E quantas terá o 6º nível de Bia?
- b) Ana planeja fazer um formigueiro com 40 camadas. Calcule o número total de câmaras somando todas as 40 camadas.
- c) Qual é a quantidade mínima de níveis que Bia precisa escavar para que o total de câmaras do seu formigueiro seja maior do que o formigueiro de 40 camadas de Ana?

Solução:

a) Listando os termos até o 6º:

- Ana (ímpares): 1, 3, 5, 7, 9, 11.
- Bia (dobros): 1, 2, 4, 8, 16, 32.

Resposta: Ana terá 11 câmaras e Bia terá 32 câmaras.

b) O total de câmaras a é a quadragésima camada é a soma dos primeiros 40 ímpares que é dada por. $1 + 3 + 5 + \dots + 79$. Essa é a soma dos quarenta primeiros termos de uma P.A. de razão que pode ser feita do seguinte modo:

$$1 + 3 + 5 + \dots + 79 = \frac{(1 + 79) \cdot 40}{2} = 1600$$

c) O total de câmaras de Bia até o nível n é dado pela soma dos n primeiros termos de uma P.G. de razão 2 e termo inicial 1 que é dada por

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Queremos encontrar o menor n tal que o total seja maior que 1600.

Testando as potências de 2:

- Para 10 níveis: o total é $2^{10} - 1 = 1023$. (Menor que 1600).
- Para 11 níveis: o total é $2^{11} - 1 = 2047$. (Maior que 1600).

Resposta: Bia precisa escavar 11 níveis.

2. Um grupo de 6 bailarinas veste camisetas numeradas de 1 até 6. No palco, existem 6 marcas no chão também numeradas de 1 até 6. Uma “*formação*” consiste em posicionar cada bailarina sobre uma marca, de modo que todas as marcas estejam ocupadas. Dizemos que uma bailarina está na *posição original* quando o número de sua camiseta é igual ao número da marca no chão.

- Considere apenas as 5 bailarinas numeradas de 1 até 5 e as marcas de 1 até 5. Quantas formações existem em que nenhuma bailarina esteja na sua posição original?
- Considere agora as 6 bailarinas. Quantas formações existem em que exatamente uma bailarina esteja na **posição original** e as outras cinco estejam fora da sua **posição original**?
- Considere novamente as 6 bailarinas. Chamamos de *caminhada* uma forma de reorganizar as bailarinas: Para cada marca X no chão é designada uma nova marca Y no chão (X pode ser igual a Y), de modo que a bailarina que estava sobre a marca X se movimentará para a marca Y .

Podemos representar uma caminhada por uma tabela de duas linhas: na primeira linha, temos as marcas de 1 a 6; na segunda linha, embaixo de cada marca X , há a marca Y para onde a bailarina da marca X se movimenta.

Por exemplo, a seguinte tabela

Início	1	2	3	4	5	6
Depois	2	1	3	4	5	6

indica que as bailarinas das marcas 1 e 2 trocaram de lugar, e as demais permaneceram onde estavam.

Uma caminhada é chamada de *espelhada* quando, começando com todas as bailarinas em suas posições originais e realizando a caminhada duas vezes seguidas, todas voltam às posições originais.

A caminhada acima é espelhada. Já a caminhada

Início	1	2	3	4	5	6
Depois	2	3	1	4	5	6

não é espelhada, pois, ao repeti-la, a bailarina 1 termina na marca 3, que não é sua posição original.

Quantas caminhadas espelhadas existem?

Solução:

- Objetivo: Encontrar o número de formações com 5 bailarinas em 5 marcas de modo que *nenhuma* fique na sua posição original (um desarranjo).

Vamos focar na bailarina 1. Ela tem 4 opções de marcas para escolher (2, 3, 4 ou 5). Suponha, sem perda de generalidade, que a bailarina 1 escolha a marca 2. Para posicionar as demais bailarinas, o problema se divide em dois casos disjuntos, dependendo da escolha da bailarina 2 (Princípio Aditivo):

Caso 1: A bailarina 2 escolhe a marca 1.

Neste cenário, a bailarina 1 e a bailarina 2 apenas trocaram de lugar. Restam as bailarinas 3, 4 e 5 para serem distribuídas nas marcas 3, 4 e 5, de modo que nenhuma fique em sua marca original. O número de desarranjos para 3 elementos é 2 (3 vai para 4, 4 vai para 5, 5 vai para 3; ou 3 vai para 5, 5 vai para 4, 4 vai para 3). Temos 2 possibilidades neste caso.

Caso 2: A bailarina 2 escolhe qualquer marca diferente da 1.

Neste cenário, precisamos distribuir as bailarinas 2, 3, 4 e 5 nas marcas 1, 3, 4 e 5. Note que a bailarina 3 não pode ir para a 3, a 4 não pode ir para a 4, a 5 não pode ir para a 5, e a bailarina 2 não pode ir para a marca 1 (por definição deste caso). Isso é estruturalmente idêntico a um desarranjo de 4 elementos, onde a “posição original” da bailarina 2 passou a ser virtualmente a marca 1. Como foi provado na solução do item *c* da prova do nível 1, o número de desarranjos de 4 elementos é 9. Temos 9 possibilidades neste caso.

Pelo Princípio Aditivo, se a bailarina 1 for para a marca 2, temos um total de $2 + 9 = 11$ formações válidas. Como a bailarina 1 tinha 4 escolhas iniciais possíveis e cada uma gera 11 desdobramentos idênticos, usamos o Princípio Multiplicativo:

$$\text{Total} = 4 \times 11 = 44$$

Resposta do item a: Existem 44 formações.

- b) Objetivo: Encontrar o número de formações com 6 bailarinas onde *exatamente uma* fique na sua posição original e as outras cinco fiquem fora.

Podemos dividir este problema em duas etapas independentes:

Etapa 1: Escolher qual bailarina ficará na sua posição original.

Dentre as 6 bailarinas, temos 6 opções possíveis para escolher a que ficará fixa.

Etapa 2: Posicionar as 5 bailarinas restantes.

Após fixar uma bailarina, sobram 5 bailarinas e 5 marcas correspondentes. A restrição é que *nenhuma* dessas 5 fique na sua posição original. Este é exatamente o cálculo que acabamos de realizar no item a. Sabemos que existem 44 maneiras de organizar essas 5 bailarinas.

Aplicando o Princípio Multiplicativo para as duas etapas:

$$\text{Total} = 6 \text{ (escolhas da fixa)} \times 44 \text{ (formas de desorganizar as outras 5)} = 264$$

Resposta do item b: Existem 264 formações.

- c) Objetivo: Encontrar quantas caminhadas são *espelhadas* para 6 bailarinas.

Para que a caminhada retorne ao início após duas repetições, a reordenação deve ser composta apenas por bailarinas que ficam fixas ou por pares de bailarinas que trocam de lugar entre si.

Vamos dividir o cálculo em casos disjuntos, dependendo da quantidade de pares que trocam de lugar (Princípio Aditivo):

Caso 0: Nenhuma troca.

Todas as 6 bailarinas ficam em suas posições originais. Existe 1 caminhada.

Caso 1: Exatamente um par troca de lugar (2 trocam, 4 fixas).

Basta escolhermos 2 bailarinas dentre as 6 para formar o par. Temos 6 opções para a primeira integrante e 5 para a segunda ($6 \times 5 = 30$). Como a ordem no par não importa, dividimos por 2.

$$30/2 = 15 \text{ caminhadas.}$$

Caso 2: Exatamente dois pares trocam de lugar (4 trocam, 2 fixas).

Etapa 1: Escolher as 2 bailarinas que ficarão fixas. Existem $(6 \times 5)/2 = 15$ modos.

Etapa 2: Com as 4 bailarinas restantes, formamos dois pares. A primeira bailarina disponível tem 3 opções de parceira. As duas que sobram formarão o segundo par automaticamente (1 opção). O número de formas de pareá-las é $3 \times 1 = 3$.

Pelo Princípio Multiplicativo: $15 \times 3 = 45$ caminhadas.

Caso 3: Exatamente três pares trocam de lugar (6 trocam, 0 fixas).

Pegamos a primeira bailarina (por exemplo, a de número 1). Ela tem 5 opções de parceira. Sobram 4 bailarinas. Pegamos a próxima disponível. Ela tem 3 opções de parceira. Sobram 2 bailarinas, que formam o último par (1 opção).

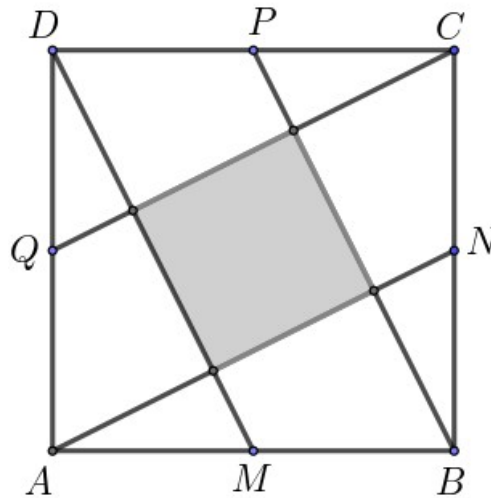
Pelo Princípio Multiplicativo: $5 \times 3 \times 1 = 15$ caminhadas.

Finalmente, aplicando o Princípio Aditivo para somar todos os casos:

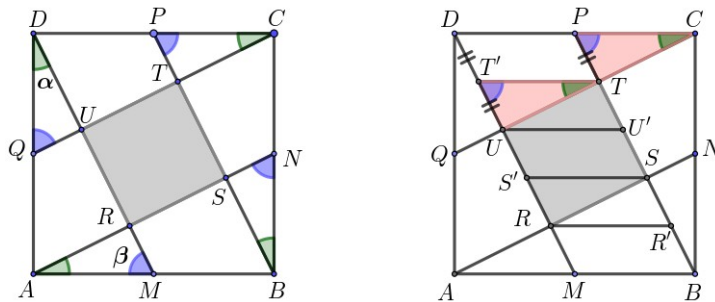
$$\text{Total} = 1 \text{ (Caso 0)} + 15 \text{ (Caso 1)} + 45 \text{ (Caso 2)} + 15 \text{ (Caso 3)} = 76$$

Resposta do item c: Existem 76 caminhadas espelhadas.

3. Considere um quadrado $ABCD$. Sejam M, N, P e Q os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA , respectivamente. Observe a figura abaixo, construída a partir desses pontos. Determine a razão entre a área do quadrilátero hachurado e a área total do quadrado $ABCD$.



Solução: Denotemos por $[ABCD]$ a área do quadrado $ABCD$.



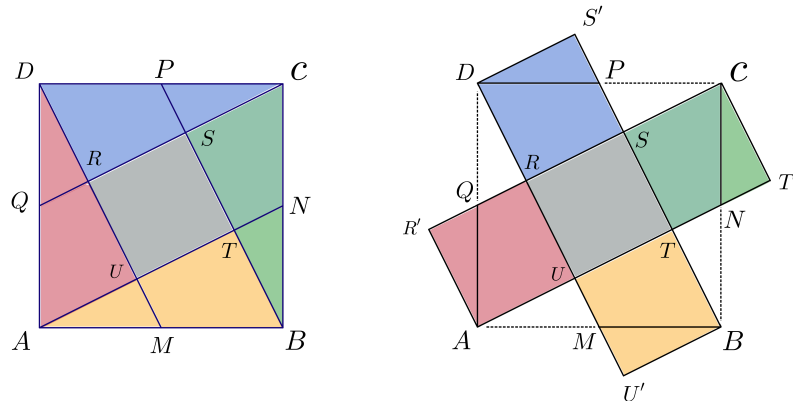
- (1) Primeiro observamos que o quadrilátero hachurado é um quadrado. Isto, segue pois no $\triangle AMD$, temos $\alpha + \beta = 90^\circ$ (onde $\alpha = \widehat{ADM}$ e $\beta = \widehat{AMD}$) e os triângulos AMD, BNA, CPB e DQB são congruentes pelo critério LAL .
- (2) Segue de (1) que os triângulos AMR, BNS, CPT e DQU são congruentes, critério ALA .
- (3) Pelos vértices do quadrado hachurado trace segmentos paralelos ao lado AB , veja figura acima à direita. Temos $T'TPD$ é paralelogramo e $\triangle TPC$ é congruente ao $\triangle UT'T$, pelo critério ALA . Segue que T' é ponto médio do segmento DU . Analogamente, R' é ponto médio de BS . Por (2), obtemos que o lado do quadrado UT é igual a $TC = UD$, pois $\triangle QUD$ é congruente a $\triangle PTC$. Como $CU'TT'$ e $RR'SS'$ são paralelogramos, obtemos que U' é ponto médio de TS e S' é ponto médio de RU .
- (4) De (3), concluímos que os paralelogramos $MBR'R, RR'SS', S'SU'U, UU'TT'$ e $T'TPD$ são congruentes. Como a diagonal de paralelogramo o divide em dois triângulos congruentes, tais triângulos possuem a mesma área. Portanto, a área do quadrado hachurado, corresponde à área de dois desses paralelogramo citados acima.
- (5) Finalmente, note que a área de cada um dos triângulos $\triangle AMD$ e $\triangle BCP$ representam $1/4$ da área do quadrado $ABCD$. Logo, $[MBPC] = \frac{1}{4}[ABCD]$. E como a área hachurada corresponde a dois dos 5 paralelogramos citados acima, obtemos

$$[RSTU] = \frac{2}{5}[MBPD] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}[ABCD] = \frac{1}{5}[ABCD].$$

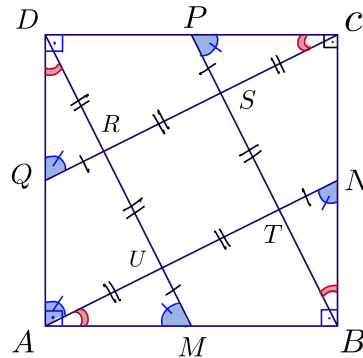
Logo, a porcentagem da área hachurada em relação ao quadrado $ABCD$ é $\frac{1}{5}$

Solução 2

Uma outra solução consiste em “recortar” e “encaixar”¹ os triângulos de cada uma das pontas, conforme a figura a seguir, obtendo-se uma figura formada por cinco quadrados idênticos, na qual a área hachurada corresponde a um quinto da área da figura.



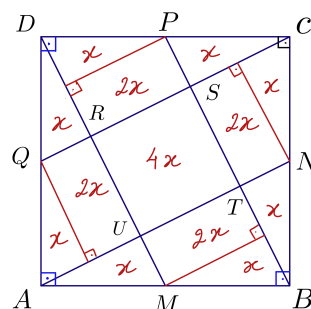
Justificativa: Da construção a partir dos pontos médios de $ABCD$, podemos concluir que o quadrilátero $RSTU$ é realmente um quadrado cuja medida dos lados coincide com a medida dos segmentos DR , AU , BT e CS . De fato, os triângulos retângulos ABN , BCP , CDA e DAM são congruentes (critério LAL) e seus ângulos agudos são também ângulos internos dos triângulos AMU , BNT , CPS e DQR .



Daí, esses últimos triângulos são congruentes entre si (pelo critério ALA) e $DR = AU = BT = CS$. As retas AN e CQ são paralelas (perpendiculares a DM e BP) e sendo $DQ = QA$, segue-se que $DR = RU$ e $QR = \frac{1}{2}AU = \frac{1}{2}RU$. Portanto, considerando o triângulo AQR' congruente ao triângulo DQR ($QR' = QR$) completamos um quadrado $AURR'$, congruente ao quadrado $RSTU$. De forma análoga se obtém os outros quadrados.

3ª Ideia: Considerando as congruências estabelecidas anteriormente, a conclusão do problema também pode ser obtida baixando-se perpendiculares dos pontos Q , M , T e S , respectivamente, às retas AN , BP , CQ e DM . Assim, formamos novos triângulos congruentes e retângulos cuja área é o dobro da área dos triângulos. Fazendo $x = [AMU] = [BNT] = [CPS] = [DQR]$, temos as áreas das regiões representadas na figura a seguir, dadas em termos de x .

$$\text{Portanto, } \frac{[RSTU]}{[ABCD]} = \frac{4x}{20x} = \frac{1}{5}.$$



¹Por exemplo, realizando rotações de 90° em torno de cada vértice ou rotações de 180° em torno dos pontos médios dos lados.

4. Mostre que, para todo inteiro positivo n par,

$$a_n = 3^{2n} \cdot (3^{2n+1} - 1)$$

termina em 02 quando escrito em notação decimal.

Solução: Vamos mostrar por indução em n . Para $n = 2$, temos $a_2 = 19602$ que termina em 02. Suponha que o resultado é válido para n par, vamos mostrar que também é válido para $n + 2$. Para mostrar isso, vamos mostrar que o número 100 divide $a_{n+2} - a_n$.

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_n &= 3^{2(n+2)} (3^{2(n+2)+1} - 1) - 3^{2n} (3^{2n+1} - 1) \\ &= 81 \cdot 3^{2n} (3^{2n+5} - 1) - 3^{2n} (3^{2n+1} - 1) \\ &= 3^{2n} (81 \cdot 3^{2n+5} - 81 - 3^{2n+1} + 1) \\ &= 3^{2n} (6560 \cdot 3^{2n+1} - 80) \\ &= 80 \cdot 3^{2n} (82 \cdot 3^{2n+1} - 1) \end{aligned} \tag{1}$$

Observe que 20 divide 80, se 5 dividir $(82 \cdot 3^{2n+1} - 1)$, teremos mostrado que 100 divide $a_{n+2} - a_n$.

Observe que 3^2 deixa resto 4 na divisão por 5 e se n for par 3^{2n} deixa resto 1. Portanto 3^{2n+1} deixa resto 3 na divisão por 5. Como 82 deixa resto 2 na divisão por 5, $82 \cdot 3^{2n+1}$ deixa resto 1, assim $(82 \cdot 3^{2n+1} - 1)$ deixa resto zero na divisão por 5.

Como 100 divide $a_{n+2} - a_n$ e a_n termina em 02, mostramos que para todo n par a_n termina em 02.

5. Há uma urna contendo 300 bolas verdes numeradas com o número 2, 200 bolas jade numeradas com o número 3 e 100 bolas violetas numeradas com o número 6. Gabriel, João e Vinicius jogam um jogo composto por 600 rodadas (em cada rodada, apenas um jogador participa). As regras são as seguintes:

- Inicialmente, todas as bolas são retiradas da urna, uma a uma, em ordem aleatória.
- Gabriel joga na i -ésima rodada se, e somente se, a i -ésima bola retirada for verde.
- João joga na i -ésima rodada se, e somente se, a i -ésima bola retirada for jade.
- Vinicius joga na i -ésima rodada se, e somente se, a i -ésima bola retirada for violeta.
- Em cada rodada, o jogador designado deve escolher um número real positivo estritamente menor que o número escrito na bola correspondente.
- O vencedor é o jogador que obtiver a maior soma dos números escolhidos ao longo de suas rodadas.

Qual é a probabilidade de que a ordem aleatória das bolas garanta uma estratégia vencedora para cada um deles?

Solução: Mostraremos que o jogador que possui uma estratégia vencedora é exatamente aquele que é o último a realizar sua primeira jogada. Suponha que os jogadores A e B já tenham jogado: o jogador A escolhe $M(A) - \varepsilon$ em sua primeira jogada (onde $M(A)$ é o supremo do conjunto de opções disponíveis para A), e o jogador B escolhe $M(B) - \delta$ (onde $M(B)$ é definido de forma análoga).

Para que o jogador C vença, basta que a soma de todos os números que ele escolher exceda tanto $600 - \varepsilon$ quanto $600 - \delta$. Isso é trivialmente possível, pois o jogador C pode fazer com que a soma dos números escolhidos seja arbitrariamente próxima de 600.

Para calcular as probabilidades requeridas, observe que, uma vez conhecido quem retira a primeira bola, a probabilidade de que o próximo “novo” jogador a aparecer seja um dos outros dois depende apenas da razão entre as bolas restantes de cada cor (podemos ignorar as bolas da cor já observada).

- Probabilidade de G ser o primeiro:

$$\Pr(G \text{ ser o primeiro}) = \frac{300}{600}.$$

$$\Pr(J \text{ antes de } V) = \frac{200}{300}, \quad \Pr(V \text{ antes de } J) = \frac{100}{300}.$$

- Probabilidade de J ser o primeiro:

$$\Pr(J \text{ ser o primeiro}) = \frac{200}{600}.$$

$$\Pr(G \text{ antes de } V) = \frac{300}{400}, \quad \Pr(V \text{ antes de } G) = \frac{100}{400}.$$

- Probabilidade de V ser o primeiro:

$$\Pr(V \text{ ser o primeiro}) = \frac{100}{600}.$$

$$\Pr(G \text{ antes de } J) = \frac{300}{500}, \quad \Pr(J \text{ antes de } G) = \frac{200}{500}.$$

Assim, as probabilidades de G , J e V serem o último a realizar sua primeira jogada (e portanto vencer) são, respectivamente:

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}, \quad \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{4}.$$

O que se simplifica para:

$$(G, J, V) = \left(\frac{9}{60}, \frac{16}{60}, \frac{35}{60} \right).$$