Olimpíada Pernambucana de Matemática 2025

Primeira Fase - Nível 2 (8º e 9º anos)

CADERNO DE SOLUÇÕES

1. Débora produz $N > 10$ chocolates. No dia do empacotamento, o fornecedor entrega apenas um dos dois modelos de caixinhas, em quantidade suficiente:

- modelo A: caixinhas que acomodam 10 chocolates;
- modelo B: caixinhas que acomodam 12 chocolates.

Débora não sabe qual modelo chegará. Ela embalará o máximo possível de chocolates em caixas totalmente preenchidas do modelo recebido e deseja que sobrem exatamente 3 chocolates para dar às suas filhas, independentemente de qual modelo (A ou B) for entregue.

Se N é o menor número natural de chocolates para que isso aconteça, assinale a alternativa que apresenta o valor que corresponde a soma dos dígitos de N.

(A) 2

(B) 3

(C) 6

(D) 9

(E) 11

Solução: Note que $N = 10q + 3$ e $N = 12l + 3$. Daí $N - 3$ é multiplo de 10 e de 12. Assim $N - 3$ é múltiplo de $\text{mmc}(10, 12) = 60$. Como N é o menor posível, devemos ter $N - 3 = 60$. Portanto, $N = 63$ e a alternativa correta é a (D).

2. Pedro foi visitar sua amiga Tina e, ao chegar lá, encontrou uma caixa cheia de biscoitos sortidos! Dentro havia 10 biscoitos de chocolate, 9 de morango, 8 de doce de leite e 7 de baunilha.

Tina, que adora um bom desafio, disse o seguinte: **"Você pode ir pegando os biscoitos, um por um, sem olhar! Assim que tirar 3 do mesmo sabor, poderá ficar com eles e devolver o resto."**

Qual a menor quantidade de biscoitos que Pedro precisa retirar para garantir um trio de biscoitos com o mesmo sabor?

(A) 7

(B) 8

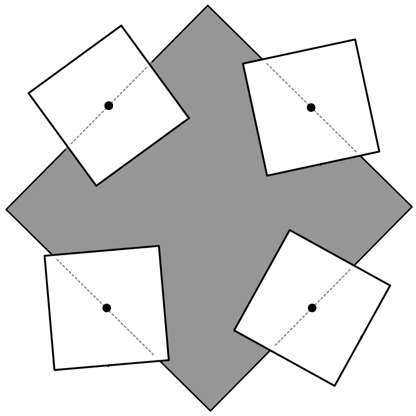
(C) 9

(D) 10

(E) 11

Solução: Para evitar formar um trio, Pedro pode retirar, no máximo, 2 biscoitos de cada sabor. Como há 4 sabores, Pedro pode retirar no máximo 8 biscoitos sem que necessariamente tenha um trio de biscoitos com o mesmo sabor. Consequentemente, ele precisa retirar 9 biscoitos para garantir três biscoitos com o mesmo sabor. Portanto, a alternativa correta é a letra (C).

3. Na Quadradolândia, um parque temático resolveu construir um brinquedo tipo carrossel inspirado no símbolo da OPEMAT. O carrossel foi construído da seguinte forma: quatro cabines quadradas de lado 2 são colocadas sobre os lados de uma plataforma quadrada de lado 5 de modo que o centro de cada cabine está posicionada nos pontos médios dos lados da plataforma. Durante seu funcionamento, tanto a plataforma quanto as cabine giram em torno de seus centros de forma aleatória, conferindo momentos de fortes emoções. Em determinado instante, uma vista de cima do brinquedo está representada pela figura a seguir.



Com respeito à medida S da área sombreada que é interna ao quadrado maior e externa aos menores, é correto afirmar que:

(A) O valor de S é igual a 17.

(B) O valor de S está entre 10 e 16.

(C) O valor de S é menor que ou igual a 9.

(D) O valor de S é maior que ou igual a 18.

(E) O valor de S depende da posição específica das cabines.

Solução: Uma reta que passa pelo centro de um quadrado divide-o em duas regiões de mesma área. Assim,

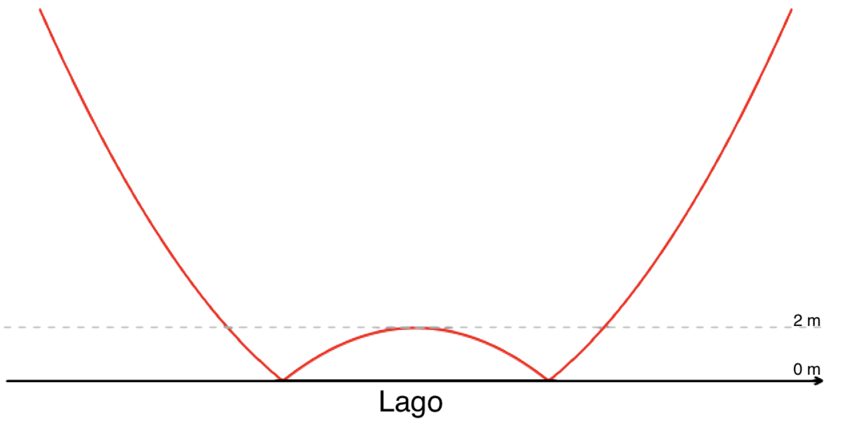
$$S = 25 - 4 \cdot \frac{4}{2} = 17.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (A).

4. O **valor absoluto** ou **módulo** de um número real x é definido como $|x| = x$, se $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$. Assim, por exemplo, $|2| = 2$ e $|-2| = 2$.

Um fotógrafo posicionou sua câmera diante de um lago para registrar pássaros que sobrevoam a região em busca de peixes. Ele configurou a câmera para disparar sempre que o pássaro estivesse a 2 metros de altura em relação à superfície da água.

Em certo momento, um pássaro descreve a trajetória dada pela curva $y(t) = |t^2 - 6t + 7|$, conforme ilustrado na figura abaixo, em que y representa a altura do pássaro em relação ao lago (em metros) e t é o tempo decorrido (em segundos).



Assinale a alternativa que corresponde à soma dos instantes de tempo em que a câmera foi acionada.

(A) 3

(B) 5

(C) 7

(D) 9

(E) 11

Solução: A câmera é acionada nos instantes de tempo t tais que $y(t) = 2$, ou seja, quando $|t^2 - 6t + 7| = 2$. Isso equivale a

$$t^2 - 6t + 7 = 2 \quad \text{ou} \quad t^2 - 6t + 7 = -2.$$

No primeiro caso,

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

que pode ser reescrito como

$$(t - 5)(t - 1) = 0.$$

Assim, $t = 5$ ou $t = 1$ são soluções da equação dada. No segundo caso,

$$t^2 - 6t + 9 = 0,$$

que pode ser reescrito como

$$(t - 3)^2 = 0,$$

cuja única solução é $t = 3$. Portanto, a soma dos valores de t que satisfazem a equação é $1 + 3 + 5 = 9$. Logo, a alternativa correta é a letra (**D**).

5. Na cozinha da vovó, há 12 potes coloridos de bombons, todos distintos:

- 7 potes azuis com quantidade par de bombons,
- 5 potes vermelhos com quantidade ímpar de bombons.

João e Maria querem escolher 3 potes para dividir igualmente entre eles. Para que a divisão seja justa, o total de bombons dos 3 potes deve ser um número par (assim, cada um recebe metade exata, sem sobrar bombons). De quantas maneiras diferentes eles podem escolher os 3 potes?

(A) 35

(B) 45

(C) 70

(D) 90

(E) 105

Solução: Como o total de biscoitos deve ser par, há duas possibilidades, João e Maria podem escolher:

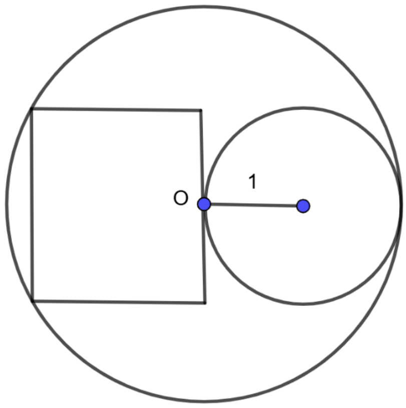
- (i) três potes azuis, ou
- (ii) dois potes vermelhos e um pote azul.

No caso (i), há 7 modos de se escolher o primeiro pote, 6 modos de escolher o segundo pote e 5 modos de escolher o terceiro pote. Assim, existem $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ modos de se escolher 3 potes azuis. Note, porém, que cada escolha distinta foi contada 6 vezes nesse processo. Com efeito, suponha deseja-se escolher os potes P_1, P_2 e P_3. Tal escolha poderia ser obtida de 6 modos: (P_1, P_2, P_3), (P_1, P_3, P_2), (P_2, P_1, P_3), (P_2, P_3, P_1), (P_3, P_1, P_2) e (P_3, P_2, P_1). Assim, devemos dividir o valor obtido anteriormente por 6, obtendo assim $210/6 = 35$ modos distintos de se escolher 3 potes azuis.

No caso (ii), temos $5 \cdot 4 = 20$ modos de se escolher os potes vermelhos. Por um raciocínio análogo, cada escolha distinta de dois potes vermelhos foi contada 2 vezes. Assim, devemos dividir o valor obtido anteriormente por 2 obtendo assim $20/2 = 10$ modos distintos de escolher se 2 potes vermelhos. Feita essa escolha, há 7 modos de se escolher o pote azul. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $10 \cdot 7 = 70$ modos de escolhermos 2 potes vermelhos e um azul.

Como dividimos o problema em casos, segue, pelo princípio aditivo, que há $35 + 70 = 105$ maneiras de se escolher 3 potes de modo que o total de biscoitos seja par. Assim, a alternativa correta é a letra (E).

6. Considere um quadrado com dois de seus vértices pertencentes a uma circunferência de centro no ponto O. Uma circunferência menor de raio 1 é tangente a um dos lados do quadrado em O e tangente à circunferência maior, conforme ilustra a figura abaixo.



Assinale a alternativa que corresponde à área do quadrado.

(A) $\frac{16}{5}$

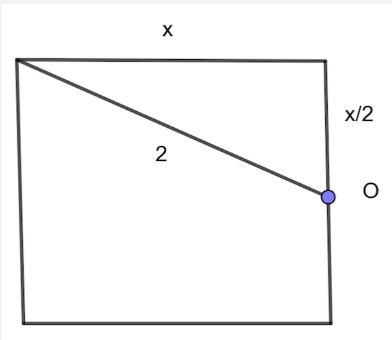
(B) 4

(C) $\frac{9}{4}$

(D) 1

(E) 5

Solução: Seja x o lado do quadrado. Observe a configuração abaixo:

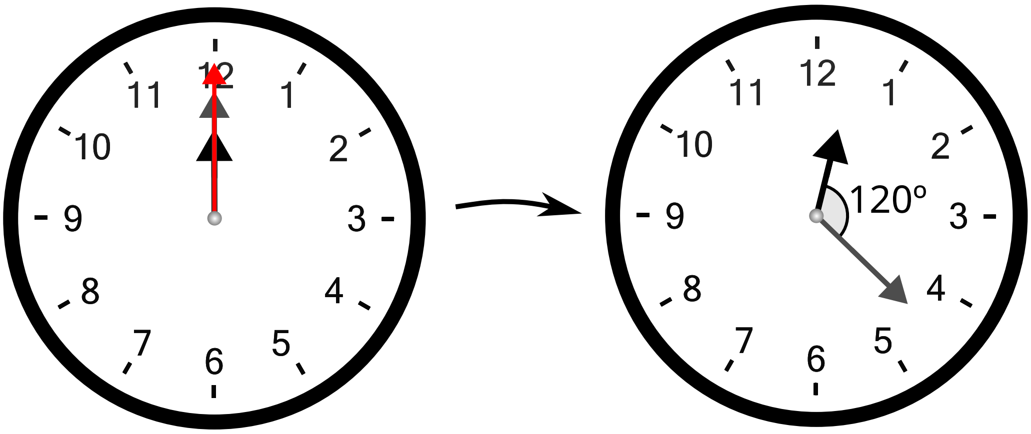


Usando o Teorema de Pitágora, temos

$$\begin{aligned} 2^2 &= x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ 4 &= x^2 + \frac{x^2}{4} \\ 4 &= \frac{5x^2}{4} \\ x^2 &= \frac{16}{5}. \end{aligned}$$

Logo, a área do quadrado é $\frac{16}{5}$ e portanto a alternativa correta é a letra (A).

7. Imagine um relógio analógico tradicional marcando exatamente 12:00:00. Após algum tempo, os ponteiros das horas e dos minutos formam pela primeira vez um ângulo de 120° entre si, conforme ilustrado na figura abaixo.



Assinale a alternativa que melhor representa a posição do ponteiro dos segundos no mostrador do relógio no instante de tempo considerado.

(A) Entre 1 e 2

(B) Entre 3 e 4

(C) Entre 6 e 7

(D) Entre 9 e 10

(E) Entre 12 e 1

Solução: Cada segundo corresponde a uma movimentação de 6° no ponteiro dos segundos, assim como cada minuto corresponde a uma movimentação de 6° no ponteiro dos minutos. Cada hora corresponde a uma movimentação de 30° no ponteiro das horas. Ou seja, $1'$ corresponde a uma movimentação de $0,5°$ no ponteiro das horas. O tempo necessário, em minutos, para o ângulo entre o ponteiro dos minutos e o ponteiro das horas, em graus, ser 120° é

$$6t - \frac{1}{2}t = \frac{11}{2}t = 120,$$

nos dando $t = 240/11 = 21,8$ minutos. Neste tempo, o ponteiro dos segundos se desloca $21,8 \cdot 360$ graus. Desconsiderando as voltas completas, sobram $0,8 \cdot 360 = 288°$. O ponteiro dos segundos está, portanto, entre 9 (270°) e 10 (300°). Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

8. Considere a multiplicação abaixo, em que as letras A, B e C representam um único dígito (de 0 a 9):

$$\begin{array}{r} 2\ A\ B \\ \times\ C\ 3 \\ \hline 9\ 1\ 5\ 9 \end{array}$$

Sabendo que a multiplicação está correta, assinale a alternativa que corresponde ao valor do dígito que está na **segunda posição** do número de três algarismos.

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Solução: Fazendo as contas com os termos desconhecidos, obtemos:

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & A & B \\ & & \times\ C & 3 \\ \hline & 6 & 3A & 3B \\ 2C & AC & BC & \end{array}$$

O resultado da conta é 9159. Como o último dígito do resultado é 9, segue que $B \times 3 = 9$, logo $B = 3$. Olhando o primeiro dígito do resultado, segue que $2C < 9$.Note que $C = 1, 2, 3$ ou 4 (C não pode se ser zero, do contrário o resultado da multiplicação teria 3 dígitos).

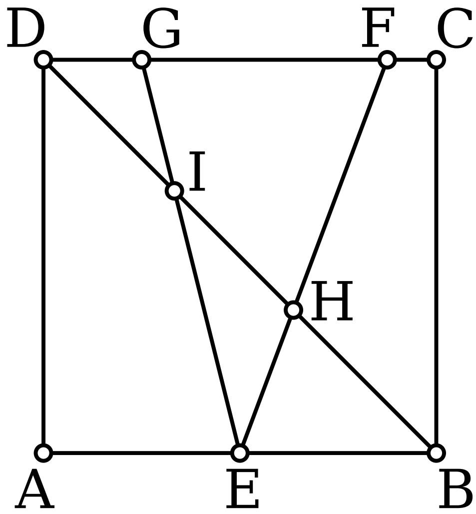
Olhando para o segundo dígito temos que $3A + BC = 3(A + C)$ deve deixar resto 5 na divisão por 10 e deve ser múliplo de 3. Logo, $3(A+C) = 15$ ou 45 ou 75 etc. $A+C < 9+4 = 13 \Rightarrow 3(A+C) = 15 < 39 < 45$. Olhando para o dígito das dezenas do resultado, considerando que do dígito das dezenas para centenas o "noves fora" foi 1, obtemos $6 + AC + 1$ deixa resto 1 na divisão por 10.

Só temos quatro possibilidades de valores para A e C.

1. $A = 1$, $C = 4$;
2. $A = 4$, $C = 1$;
3. $A = 2$, $C = 3$;
4. $A = 3$, $C = 2$

Em todo caso $AC \leq 6$, o que nos dá $6 + AC + 1 < 20$ e assim o "noves fora" do dígito das centenas para o dígito do milhar também é 1. Desse modo, $4C + 1 = 9$ fornecendo $C = 4$ e $A = 1$. Portanto, a alternativa certa é (B).

9. Considere um quadrado unitário **ABCD**, conforme mostra a figura abaixo, em que E é o ponto médio do segmento AB, o segmento DG mede $\frac{1}{4}$ e o segmento FC mede $\frac{1}{8}$.



Assinale a alternativa que corresponde à área do triângulo EIH.

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{3}{8}$

(C) $\frac{3}{16}$

(D) $\frac{10}{33}$

(E) $\frac{5}{66}$

Solução: Seja x a altura do triângulo EBI e y a altura do triângulo DGI. Usando as propriedades de semelhança, obtemos

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Logo, $y = \frac{1}{2}x$, por outro lado, $x + y = 1$, consequentemente,

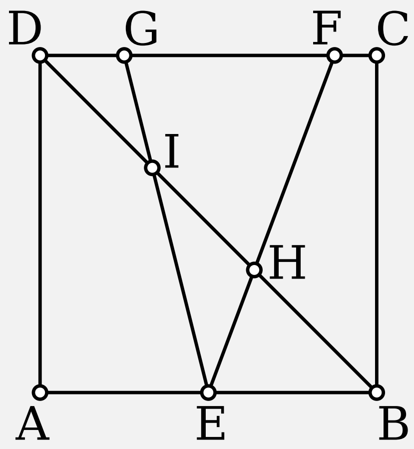
$$x + \frac{1}{2}x = 1 \tag{2}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)x = 1 \tag{3}$$

$$x = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}. \tag{4}$$

Na figura abaixo os triângulos BEH e HDR são semelhantes pelo critério ângulo, ângulo.

Solução: (Continuação)



Seja z a altura do triângulo EBH e seja w a altura do triângulo DRH. Usando novamente as propriedades de semelhança. concluimos que

$$\frac{w}{z} = \frac{1 - \dfrac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{4}. \tag{5}$$

Logo, $w = \dfrac{7}{4}z$, por outro lado, $z + w = 1$, daí,

$$z + \frac{7}{4}z = 1 \tag{6}$$

$$\frac{11}{4}z = 1 \tag{7}$$

$$z = \frac{4}{11}. \tag{8}$$

A área do triângulo EHI=área do triângulo EBI-área do triângulo EBH a qual denotaremos por S.

Portanto,

$$S = \frac{1}{2}\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}z \tag{9}$$

$$= \frac{1}{4}(x - z) \tag{10}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{11}\right) \tag{11}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{10}{33} = \frac{5}{66} \tag{12}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (E).

10. Seja $A(x)$ uma expressão algébrica satisfazendo $A(0) \geq 0$ tal que a equação

$$x^2 + x + 1 = \frac{3}{4}([A(x)]^2 + 1)$$

é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de $A(x+1) - A(x)$.

(A) $\frac{3}{4}$

(B) x

(C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(D) 0

(E) $\sqrt{3}$

Solução: A equação dada pode ser reescrita como

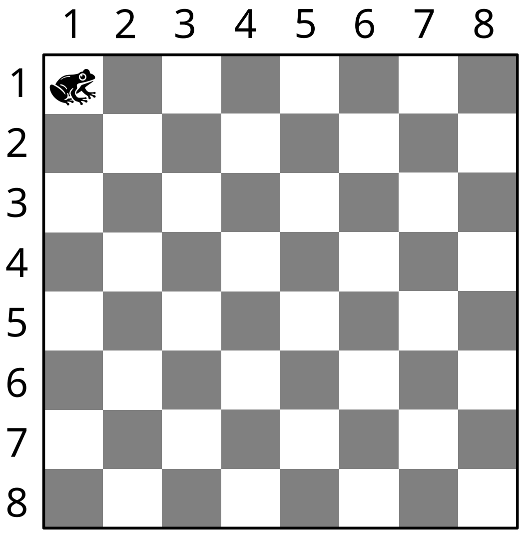
$$x^2 + x + 1 = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right].$$

Assim,

$$A(x) = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{ou} \quad A(x) = -\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Como $A(0) \geq 0$, então $A(x) = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$. Logo, $A(x+1) - A(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Portanto, a alternativa correta é a letra (C).

11. Considere um tabuleiro 8×8 pintado, conforme a figura abaixo, e denote pelo par ordenado (i, j) a casa que está na i-ésima linha e j-ésima coluna do tabuleiro.



Um **sapo robô** está inicialmente na posição $(1, 1)$. Ele só pode realizar saltos de exatamente 1 ou 3 casas, sempre dentro do tabuleiro. No primeiro salto, o sapo deve se mover ao longo da linha em que se encontra. No segundo salto, ele deve se mover ao longo da coluna. Nos saltos seguintes, ele deve alternar sempre entre linha e coluna.

Por exemplo, a partir da posição inicial $(1, 1)$, o sapo pode ir para as casas $(1, 2)$ ou $(1, 4)$ no primeiro salto. Após 2025 saltos, o que podemos afirmar?

(A) O sapo pode terminar na casa (6,3).

(B) O sapo pode terminar na casa (5,7).

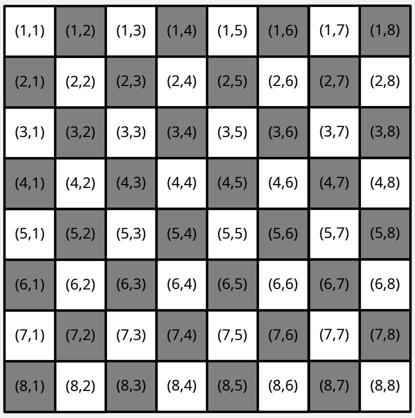
(C) O sapo pode terminar na casa (7,4).

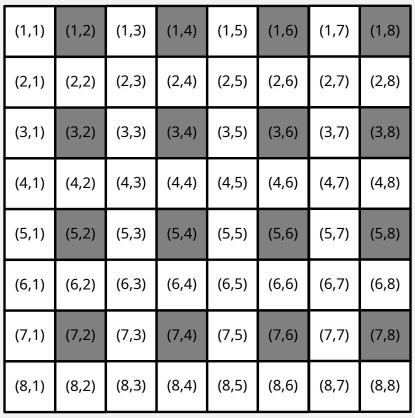
(D) O sapo pode terminar na casa (4,5).

(E) Nenhuma das anteriores.

Solução: Note que no primeiro salto o sapo muda a coluna para uma posição par. No terceiro salto, ele volta para uma coluna ímpar. No quarto salto, continua em uma coluna ímpar, mas no quinto salto a coluna se torna novamente par. Assim, temos um ciclo de quatro saltos: a cada quatro movimentos, a coluna termina em uma posição ímpar, e no salto seguinte ela passa para uma posição par. Como $2025 = 4 \cdot 506 + 1$, após 2024 saltos a coluna estará em uma posição ímpar. Portanto, no salto de número 2025, a coluna será par. Com a mesma ideia, observamos que a cada quatro saltos a linha retorna para uma posição ímpar, e o próximo salto acontece justamente ao longo da linha.

Logo, após 2025 saltos, concluímos que a coluna será par e a linha será ímpar. Portanto, os itens **(A)**, **(B)** e **(D)** são falsos.





Solução: **(Continuação)** Vamos mostrar que o item **(C)** é verdadeiro. Após os 13 passos:

$$(1,1) \to (1,2) \to (2,2) \to (2,3) \to (3,3) \to (3,2) \to (4,2) \to$$
$$\to (4,3) \to (5,3) \to (5,2) \to (6,2) \to (6,3) \to (7,3) \to (7,4)$$

o sapo se encontra na casa (7,4). Ainda faltam 2012 saltos. O sapo pode repetir 503 vezes a sequência de tamanho 4:

$$(7,4) \to (6,4) \to (6,3) \to (7,3) \to (7,4)$$

Totalizando 2025 saltos e terminando na casa (7,4). Portanto, a alternativa correta é a letra (C).

12. Durante uma feira de ciências, os organizadores montaram um painel interativo com cartões contendo todos os divisores positivos de 2025^2. Cada cartão contém um único divisor e cada divisor foi escrito em apenas um cartão. Três visitantes escolhem, sem reposição, um cartão cada um. Seja

$$P = \frac{m}{n},$$

com m e n primos entre si, a probabilidade de que entre os três números escolhidos, haja exatamente um número **primo** e dois **quadrados perfeitos**.

Assinale a alternativa que corresponde à soma $m + n$.

(A) 48

(B) 480

(C) 2.028

(D) 2.943

(E) 14.400

Solução: Fatoramos

$$2025 = 3^4 \cdot 5^2 \quad \Longrightarrow \quad 2025^2 = 3^8 \cdot 5^4.$$

Logo, o número total de divisores é

$$\tau(2025^2) = (8+1)(4+1) = 9 \cdot 5 = 45.$$

Um divisor é quadrado perfeito se os expoentes de 3 e 5 forem pares. Para 3: $0, 2, 4, 6, 8$ (5 opções); para 5: $0, 2, 4$ (3 opções). Assim, há $5 \cdot 3 = 15$ divisores quadrados perfeitos.

Os únicos divisores primos de 2025^2 são 3 e 5, portanto existem 2.

O número total de formas de escolher três divisores distintos é

$$\binom{45}{3} = 14190.$$

Precisamos de exatamente 1 primo e 2 quadrados perfeitos:

$$2 \cdot \binom{15}{2} = 2 \cdot 105 = 210.$$

Daí, a probabilidade é dada por:

$$p = \frac{210}{14190} = \frac{7}{473}.$$

Portanto, $m + n = 7 + 473 = 480$ e a alternativa correta é a letra (B).

Gabarito - Nível 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	A	**A**	A	A	**A**	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	**B**	B	B	B	**B**
C	**C**	C	C	C	C	C	C	C	**C**	**C**	C
D	D	D	**D**	D	D	**D**	D	D	D	D	D
E	E	E	E	**E**	E	E	E	**E**	E	E	E