



# Olimpíada Pernambucana de Matemática 2025

Segunda Fase - Nível 1 ( 6º e 7º anos )

## CADERNO DE SOLUÇÕES



Nome completo do(a) aluno(a): \_\_\_\_\_.

Número da identidade: \_\_\_\_\_. Órgão Expedidor: \_\_\_\_\_.

Assinatura: \_\_\_\_\_.

### LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.
02. Preencha os dados pessoais.
03. A prova é composta de 5 questões dissertativas: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos.
04. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.
05. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.
06. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.
07. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.
08. Se a Comissão considerar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.
09. Duração da prova: 4 horas.

#### Realização



UNIVERSIDADE  
FEDERAL RURAL  
DE PERNAMBUCO DEPARTAMENTO  
DE MATEMÁTICA

#### Apoio



Acesse nosso site e nosso instagram:



[www.opemat.com.br](http://www.opemat.com.br)



[www.instagram.com/opemat.ufrpe/](https://www.instagram.com/opemat.ufrpe/)

1. Na papelaria “*Escola Feliz*”, Dona Sônia vende materiais escolares apenas em pacotes fechados. Existem dois tipos de pacotes:

- Pacotes com Lápis contendo 5 unidades.
- Pacotes com Borrachas contendo 7 unidades.

As compras devem ser realizadas exclusivamente combinando quantidades inteiras desses pacotes. Uma compra é considerada impossível quando existem zero maneiras de realizá-la.

- É possível comprar exatamente 22 itens? Se sim, de quantas maneiras diferentes essa compra pode ser feita?
- É possível comprar exatamente 16 itens? Se sim, de quantas maneiras diferentes essa compra pode ser feita?
- Qual é a maior quantidade de itens que é impossível de comprar? Justifique sua resposta.

**Solução:** Sejam  $x$  a quantidade de pacotes de lápis e  $y$  a quantidade de pacotes de borrachas. O total de itens é dado por  $5x + 7y$ , onde  $x$  e  $y$  são números inteiros não negativos.

a) Sim. Queremos  $5x + 7y = 22$ . Testando valores para  $y$ :

- Se  $y = 0$ , a equação  $5x = 22$  não possui solução inteira.
- Se  $y = 1$ ,  $5x = 22 - 7 = 15 \Rightarrow x = 3$ .
- Se  $y = 2$ , a equação  $5x = 22 - 14 = 8$  não possui solução inteira.
- Se  $y = 3$ , a equação  $5x = 1$  não possui solução inteira.
- Se  $y \geq 4$ , o valor ultrapassa 22.

Portanto, há apenas uma maneira: 3 pacotes de lápis e 1 pacote de borrachas.

b) Não. Queremos  $5x + 7y = 16$ . Testando todos os valores possíveis para  $y$ :

- Se  $y = 0$ ,  $5x = 16$  (não é divisível por 5).
- Se  $y = 1$ ,  $5x = 16 - 7 = 9$  (não é divisível por 5).
- Se  $y = 2$ ,  $5x = 16 - 14 = 2$  (não é divisível por 5).
- Se  $y \geq 3$ , o valor já ultrapassa 16 ( $7 \times 3 = 21$ ).

Como não há valores inteiros de  $x$  e  $y$  que satisfaçam a equação, é impossível comprar exatamente 16 itens.

c) 23 itens.

*Justificativa:* Primeiro, verificamos que 23 é impossível testando os valores de  $y$ :

- $y = 0 \Rightarrow 5x = 23$  (não).
- $y = 1 \Rightarrow 5x = 16$  (não).
- $y = 2 \Rightarrow 5x = 9$  (não).
- $y = 3 \Rightarrow 5x = 2$  (não).

Em seguida, notamos que conseguimos formar 5 totais consecutivos logo após o 23:

- $24 = 5 \times 2 + 7 \times 2$
- $25 = 5 \times 5 + 7 \times 0$
- $26 = 5 \times 1 + 7 \times 3$
- $27 = 5 \times 4 + 7 \times 1$
- $28 = 5 \times 0 + 7 \times 4$

Como conseguimos obter 24, 25, 26, 27 e 28, qualquer valor maior que 28 pode ser obtido simplesmente adicionando pacotes de 5 unidades a um desses valores base. Logo, 23 é o maior valor impossível.

**Solução:**

2. Um grupo de 5 bailarinas veste camisetas numeradas de 1 até 5. No palco, existem 5 marcas no chão também numeradas de 1 até 5. Uma “*formação*” consiste em posicionar cada bailarina sobre uma marca, de modo que todas as marcas estejam ocupadas. Dizemos que uma bailarina está na *posição original* quando o número de sua camiseta é igual ao número da marca no chão.

- Considere apenas as 4 bailarinas numeradas de 1 até 4 e as marcas de 1 até 4. Quantas formações existem em que nenhuma bailarina esteja na sua posição original?
- Considere agora as 5 bailarinas. Quantas formações existem em que exatamente uma bailarina esteja na **posição original** e as outras quatro estejam fora da sua **posição original**?
- Considere novamente as 5 bailarinas. Chamamos de *caminhada* uma forma de reorganizar as bailarinas: Para cada marca  $X$  no chão é designada uma nova marca  $Y$  no chão ( $X$  pode ser igual a  $Y$ ), de modo que a bailarina que estava sobre a marca  $X$  se movimentará para a marca  $Y$ .

Podemos representar uma caminhada por uma tabela de duas linhas: na primeira linha, temos as marcas de 1 a 5; na segunda linha, embaixo de cada marca  $X$ , há a marca  $Y$  para onde a bailarina da marca  $X$  se movimenta.

Por exemplo, a seguinte tabela

Início	1	2	3	4	5
Depois	2	1	3	4	5

indica que as bailarinas das marcas 1 e 2 trocaram de lugar, e as demais permaneceram onde estavam.

Uma caminhada é chamada de *espelhada* quando, começando com todas as bailarinas em suas posições originais e realizando a caminhada duas vezes seguidas, todas voltam às posições originais.

A caminhada acima é espelhada. Já a caminhada

Início	1	2	3	4	5
Depois	2	3	1	4	5

não é espelhada, pois, ao repeti-la, a bailarina 1 termina na marca 3, que não é sua posição original.

Quantas caminhadas espelhadas existem?

### Solução:

- Vamos analisar as escolhas da Bailarina 1 e as consequências para as demais. A Bailarina 1 está na fila para escolher uma marca. Como ela não pode ficar na marca 1, ela tem 3 opções (marcas 2, 3 ou 4).

Vamos supor que a Bailarina 1 escolha a marca 2. Agora precisamos posicionar as bailarinas 2, 3 e 4 nas marcas restantes (1, 3 e 4), garantindo que nenhuma fique na sua própria marca. Vamos dividir as escolhas da Bailarina 2 em casos disjuntos (Princípio Aditivo):

Caso 1: A Bailarina 2 escolhe a marca 1.

Restam as bailarinas 3 e 4 para as marcas 3 e 4. A Bailarina 3 não pode ficar na marca 3, então ela *obrigatoriamente* vai para a marca 4. A Bailarina 4 fica com a marca que sobrou, a marca 3. Temos 1 possibilidade neste caso.

Caso 2: A Bailarina 2 escolhe a marca 3.

Restam as bailarinas 3 e 4 para as marcas 1 e 4. A Bailarina 4 não pode ficar na marca 4, então ela *obrigatoriamente* vai para a marca 1. A Bailarina 3 fica com a marca que sobrou, a marca 4. Temos 1 possibilidade neste caso.

Caso 3: A Bailarina 2 escolhe a marca 4.

Restam as bailarinas 3 e 4 para as marcas 1 e 3. A Bailarina 3 não pode ficar na marca 3, então ela *obrigatoriamente* vai para a marca 1. A Bailarina 4 fica com a marca que sobrou, a marca 3. Temos 1 possibilidade neste caso.

Pelo Princípio Aditivo, se a Bailarina 1 for para a marca 2, temos um total de  $1 + 1 + 1 = 3$  formações válidas.

O mesmo raciocínio se aplicaria de forma idêntica se a Bailarina 1 tivesse escolhido a marca 3 ou a marca 4 (sempre gerando 3 ramificações válidas para cada escolha inicial).

Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, multiplicamos as opções iniciais da Bailarina 1 pelas possibilidades de desdobramento de cada escolha:

$$\text{Total} = 3 \text{ (escolhas da Bailarina 1)} \times 3 \text{ (formações para cada escolha)} = 9$$

Resposta do item a: Existem 9 formações.

b) Este problema pode ser dividido em duas etapas de decisão independentes:

Etapa 1: Escolher qual bailarina ficará na sua posição original.

Como temos 5 bailarinas, temos 5 escolhas possíveis (pode ser a bailarina 1, ou a 2, ou a 3, ou a 4, ou a 5).

Etapa 2: Posicionar as 4 bailarinas restantes.

Uma vez fixada a bailarina que fica no seu lugar correto, restam 4 bailarinas e 4 marcas. A condição do problema exige que *nenhuma* dessas 4 fique na sua posição original. Nós já calculamos exatamente esse cenário no item a. Sabemos que existem 9 maneiras de reorganizar 4 bailarinas de modo que nenhuma fique em sua marca original.

Aplicando o Princípio Multiplicativo (já que para cada escolha da Etapa 1, temos as possibilidades da Etapa 2):

$$\text{Total} = 5 \text{ (escolhas da fixa)} \times 9 \text{ (formas de desorganizar as outras 4)} = 45$$

Resposta do item b: Existem 45 formações.

c) Uma caminhada espelhada significa que, se você aplicar a mesma regra de movimento duas vezes, todas as bailarinas voltam para o ponto de partida.

Se em uma caminhada a bailarina na marca  $X$  vai para a marca  $Y$  e a bailarina da marca  $Y$  vai para uma marca  $Z$  então a bailarina da marca  $X$  não volta a sua posição original. Portanto, precisamos contar as formas de organizar as 5 bailarinas em pares de troca e posições fixas.

Isso só é possível se as bailarinas se enquadrarem em duas situações:

- (a) A bailarina não se move (fica na sua posição original).
- (b) Duas bailarinas trocam de lugar entre si (um "par de troca").

Vamos dividir o problema em casos disjuntos baseados na quantidade de pares que trocam de lugar (Princípio Aditivo):

Caso 0: Nenhuma troca.

Todas as 5 bailarinas ficam em suas posições originais. Existe apenas 1 caminhada assim.

Caso 1: Exatamente um par troca de lugar (2 trocam, 3 fixas).

Para formar o par que vai trocar de lugar, precisamos escolher 2 bailarinas dentre as 5.

- (a) Temos 5 opções para a primeira integrante do par.
- (b) Temos 4 opções para a segunda integrante.
- (c) Pelo princípio multiplicativo:  $5 \times 4 = 20$ . Porém, a ordem de escolha dentro do par não importa.
- (d) Dividindo para corrigir a repetição:  $20/2 = 10$ .

Existem 10 caminhadas neste caso.

Caso 2: Exatamente dois pares trocam de lugar (4 trocam, 1 fixa).

Podemos construir essas caminhadas em etapas:

- (a) Etapa 1: Escolher a única bailarina que ficará fixa. Temos 5 opções.
- (b) Etapa 2: Separar as 4 bailarinas restantes em dois pares. Para fazer isso, pegamos a primeira bailarina disponível. Ela tem 3 opções de parceira. Após esse primeiro par ser formado, sobrarão exatamente 2 bailarinas, que formarão o segundo par obrigatoriamente (1 opção).

Pelo princípio multiplicativo:

$$5 \text{ (escolhas da fixa)} \times 3 \text{ (escolhas de parceira)} \times 1 \text{ (parceiras restantes)} = 15$$

Existem 15 caminhadas neste caso.

Finalmente, aplicando o Princípio Aditivo, somamos os totais:

$$\text{Total} = 1 \text{ (Caso 0)} + 10 \text{ (Caso 1)} + 15 \text{ (Caso 2)} = 26$$

Resposta do item c: Existem 26 caminhadas espelhadas.

**3.** Um tradicional bloco de carnaval de Pernambuco possui, em seu acervo inicial, 93 sombrinhas de frevo e 50 estandartes.

Para renovar e equilibrar o desfile, a diretoria utiliza um “Quiosque de Trocas” que trabalha segundo duas regras estritas:

**Regra 1.** Entregar 5 sombrinhas para receber 3 estandartes.

**Regra 2.** Entregar 2 estandartes para receber 6 sombrinhas.

Determine se é possível, através de uma sucessão dessas operações, aumentar o número total de adereços do acervo em exatamente 10 unidades, de modo que, ao final, a quantidade de sombrinhas seja exatamente o dobro da quantidade de estandartes. Caso seja possível, indique quantas vezes cada regra de troca deve ser utilizada. Caso contrário, explique o porquê.

**Solução:** Sejam:

- $S_0 = 93$ : Quantidade inicial de sombrinhas.
- $E_0 = 50$ : Quantidade inicial de estandartes.
- $x$ : Número de vezes que a Regra 1 é aplicada.
- $y$ : Número de vezes que a Regra 2 é aplicada.

Analisamos o saldo líquido de adereços (total de peças) em cada operação:

• Regra 1: Perde 5 sombrinhas, ganha 3 estandartes. Variação:  $-5 + 3 = -2$ .

• Regra 2: Perde 2 estandartes, ganha 6 sombrinhas. Variação:  $-2 + 6 = +4$ .

O problema exige que o aumento total seja de 10 unidades. Logo:

$$-2x + 4y = 10 \implies -x + 2y = 5 \implies x = 2y - 5 \quad (\text{Eq. I}) \quad (1)$$

As quantidades finais de sombrinhas ( $S_f$ ) e estandartes ( $E_f$ ) são dadas por:

$$S_f = 93 - 5x + 6y$$

$$E_f = 50 + 3x - 2y$$

A condição do problema é que  $S_f = 2 \cdot E_f$ . Substituindo as expressões:

$$93 - 5x + 6y = 2(50 + 3x - 2y) \quad (2)$$

Desenvolvendo a equação:

$$93 - 5x + 6y = 100 + 6x - 4y$$

$$6y + 4y - 5x - 6x = 100 - 93$$

$$10y - 11x = 7 \quad (\text{Eq. II})$$

Substituímos a (Eq. I) na (Eq. II):

$$10y - 11(2y - 5) = 7$$

$$10y - 22y + 55 = 7$$

$$-12y = 7 - 55$$

$$-12y = -48$$

$$y = 4$$

Agora, encontramos o valor de  $x$ :

$$x = 2(4) - 5$$

$$x = 8 - 5$$

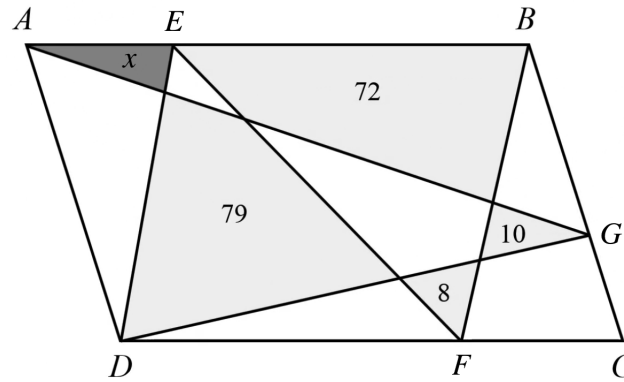
$$x = 3$$

Verificamos os valores finais com  $x = 3$  e  $y = 4$ :

- Sombrinhas:  $93 - 5(3) + 6(4) = 93 - 15 + 24 = 102$ .
- Estandartes:  $50 + 3(3) - 2(4) = 50 + 9 - 8 = 51$ .
- Proporção:  $102 = 2 \times 51$  (Correto).
- Total:  $102 + 51 = 153$ . Inicial era 143. Aumento de 10 (Correto).

**Resposta:** Sim, é possível. O bloco deve realizar a Regra 1 três vezes e a Regra 2 quatro vezes.

4. Um grande vitral de uma igreja tem o formato de um paralelogramo  $ABCD$ , conforme a figura abaixo.



Por razões estruturais, engenheiros instalam cabos de aço no interior do painel, ligando vértices e pontos das bordas, exatamente como mostrado na figura. Todos os cabos são retilíneos, e seus pontos extremos pertencem aos lados do paralelogramo.

Esses cabos dividem o painel em várias regiões. As áreas de quatro dessas regiões (em metros quadrados) são conhecidas:

- (i) um painel central no formato de um quadrilátero com área 79;
- (ii) um painel superior no formato de um quadrilátero com área 72;
- (iii) dois pequenos painéis triangulares à direita, com áreas 10 e 8.

Próxima ao vértice superior esquerdo  $A$ , há um pequeno painel triangular (a região escura na figura), cuja área é desconhecida. Determine o valor  $x$  da área desconhecida.

**Solução:** Denotaremos, doravante, por  $[P]$  a área de um polígono  $P$ . Considere o paralelogramo  $ABCD$  e os pontos

$$E \in \overline{AB}, \quad G \in \overline{BC}, \quad F \in \overline{DC}.$$

Observe inicialmente que os triângulos  $\triangle ADE$  e  $\triangle EFB$  têm bases contidas em  $\overline{AB}$ , e a soma das medidas dessas bases é igual à medida de  $AB$ . Além disso, ambos possuem altura igual à altura do paralelogramo  $ABCD$  relativa à base  $AB$ .

Logo, a soma das áreas desses dois triângulos é igual à metade da área do paralelogramo:

$$[ADE] + [EFB] = \frac{1}{2}[ABCD].$$

Por outro lado, considere o triângulo  $\triangle ADG$ . Tomando  $AD$  como base do paralelogramo, nota-se que  $\triangle ADG$  tem a mesma base e a mesma altura que  $ABCD$ . Portanto,

$$[ADG] = \frac{1}{2}[ABCD].$$

Assim, conclui-se que

$$[ADE] + [EFB] = [ADG].$$

Seja  $y$  a área da parte não sombreada do triângulo  $\triangle ADE$ , de modo que

$$[ADE] = x + y.$$

Seja  $z$  a área da parte não sombreada do triângulo  $\triangle EFB$ , de modo que

$$[EFB] = 72 + z + 8.$$

Observando a decomposição do triângulo  $\triangle ADG$ , temos

$$[ADG] = y + 79 + z + 10.$$

Substituindo essas expressões na igualdade

$$[ADE] + [EFB] = [ADG],$$

obtemos

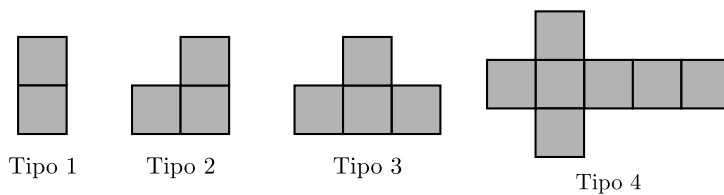
$$(x + y) + (72 + z + 8) = y + 79 + z + 10.$$

Simplificando,

$$x + 80 = 89,$$

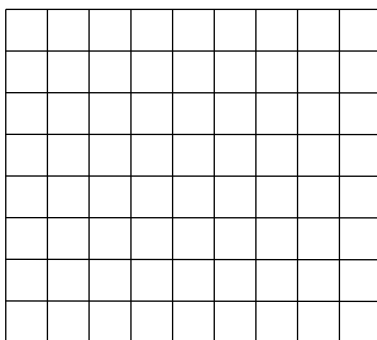
donde concluimos que  $x = 9$

5. O pai de Mateus recortou diversas peças de quatro tipos diferentes, todas compostas por quadrados unitários, conforme ilustrado abaixo. Considere que há um estoque ilimitado de cada tipo de peça e que todas podem ser rotacionadas ou refletidas.

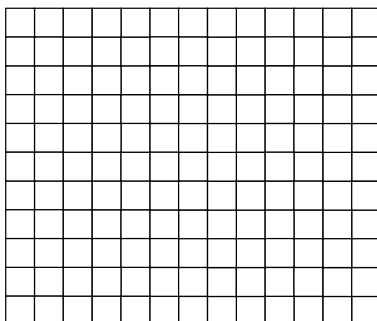


Mateus deve decidir se é possível cobrir perfeitamente (sem sobreposições ou espaços vazios) certos tabuleiros retangulares utilizando apenas alguns dos tipos de peças fornecidas. Determine se:

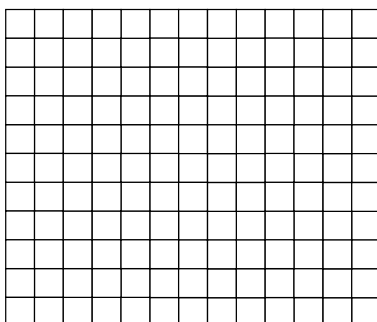
(a) é possível cobrir um tabuleiro  $8 \times 9$  usando peças do tipo 2 e/ou 3?



(b) é possível cobrir um tabuleiro  $11 \times 13$  usando peças do tipo 1 e/ou 3?

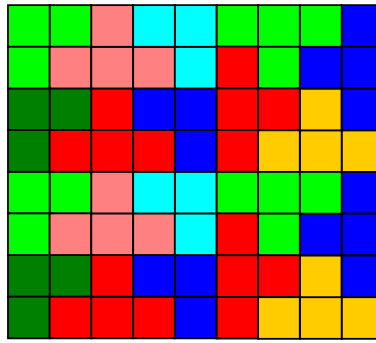


(c) é possível cobrir um tabuleiro  $11 \times 13$  usando peças do tipo 1 e/ou 4?



**Solução:**

(a) Sim



- (b) Não. Observe que o total de casas do tabuleiro é um número ímpar e tanto as peças do Tipo 1 como as peças do Tipo 3 possuem uma quantidade par de quadrados, ao utilizar várias dessas peças, elas sempre vão cobrir um número par de casas.
- (c) Não. Utilizando a coloração de um tabuleiro de xadrez atribua o valor 1 para cada casa escura e o valor  $-1$  para cada casa clara.

Supondo que a casa que fica no canto esquerdo superior é escura, o tabuleiro possui 72 casas escuras e 71 casas claras. Portanto, a soma dos valores de todas as casas deste tabuleiro é

$$72 \cdot (+1) + 71 \cdot (-1) = 1.$$

Analisando a soma dos valores que cada peça pode cobrir, observamos que

- Uma peça do Tipo 1 cobre uma casa branca  $(+1)$  e uma casa preta  $(-1)$ . O valor dessa cobertura é  $(-1) + (+1) = 0$ .
- Uma peça do Tipo 4 pode cobrir 5 casas pretas e 2 brancas. O valor dessa cobertura é 3.
- Uma peça do Tipo 4 pode cobrir 5 casas brancas e 2 pretas. O valor dessa cobertura é  $-3$ .

Seja  $P_1$  o número de peças do Tipo 1. Seja  $P_{(4,3)}$  o número de peças do Tipo 4 com valor da cobertura igual a 3. Seja  $P_{(4,-3)}$  o número de peças do Tipo 4 com valor da cobertura igual a  $-3$ . Para que a cobertura seja possível é necessário que a seguinte equação admita solução nos inteiros não negativos:

$$0 \cdot P_1 + 3 \cdot P_{(4,3)} + (-3) \cdot P_{(4,-3)} = 1,$$

ou seja,  $P_{(4,3)} - P_{(4,-3)} = \frac{1}{3}$  precisa admitir solução com  $P_{(4,3)}$  e  $P_{(4,-3)}$  inteiros, o que é um absurdo.