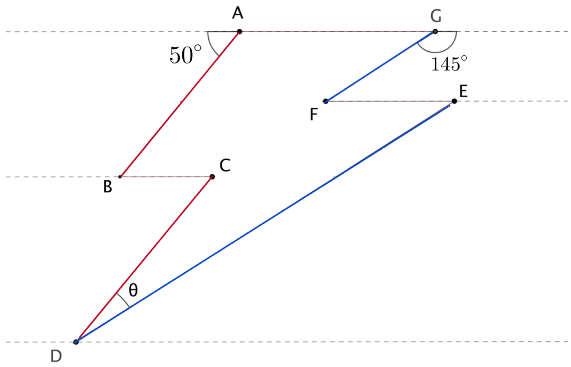
Olimpíada Pernambucana de Matemática 2025

Primeira Fase - Nível 1 (6º e 7º anos)

CADERNO DE SOLUÇÕES

1. Para desenhar o símbolo do seu traje, o super-herói π-Raio Flash fez um desenho considerando um feixe de retas paralelas pontilhadas, conforme a figura a seguir, traçando mais dois pares de retas paralelas: AB paralela a DC e DE paralela a FG. Assinale a alternativa que corresponde à medida do ângulo θ.



(A) 15°

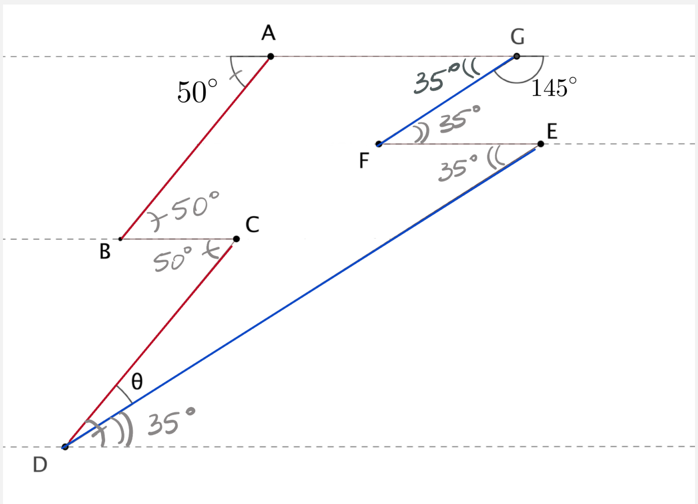
(B) 25°

(C) 35°

(D) 45°

(E) 50°

Solução: Considerando os ângulos alternos internos congruentes na figura abaixo,



temos que

$$\theta + 35^\circ = 50^\circ \ \Rightarrow \ \theta = 15^\circ.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (A).

2. No jogo de videogame *Resident Evil 3*, há um quebra-cabeça que consiste em duas colunas digitais: uma vermelha e outra azul. Inicialmente, a coluna vermelha possui 8 blocos empilhados verticalmente, e a azul possui 11. O objetivo do jogo é fazer com que ambas as colunas fiquem com exatamente 8 blocos.

Para tanto, o jogador pode operar cinco alavancas diferentes, identificadas por I, II, III, A e B, cada uma delas produzindo um efeito específico sobre as colunas, conforme ilustra a tabela abaixo:

	Alavanca				
	I	**II**	**III**	**A**	**B**
Coluna					
Vermelha	$+1$	$+2$	$+3$	-4	-3
Azul	-4	-5	-2	$+3$	$+4$

Assim, por exemplo, a alavanca I aumenta 1 bloco na coluna vermelha e diminui 4 blocos na azul.

Assinale a alternativa que indica a sequência correta de uso das alavancas que cumpre o objetivo do jogo.

(A) II, I e B.

(B) I, III e A.

(C) I, II e III.

(D) B, A e II.

(E) I, III e B.

Solução: Vamos representar o número x de blocos vermelhos e y blocos azuis em determinada etapa do jogo pelo par (xV, yA). Basta seguir as jogadas indicadas em cada alternativa.

- $(8V, 11A) \xrightarrow{II} (10V, 6A) \xrightarrow{I} (11V, 2A) \xrightarrow{B} (8V, 6A)$. A alternativa (a) é falsa.
- $(8V, 11A) \xrightarrow{I} (9V, 7A) \xrightarrow{III} (12V, 5A) \xrightarrow{A} (8V, 11A)$. A alternativa (b) é verdadeira.
- $(8V, 11A) \xrightarrow{I} (9V, 7A) \xrightarrow{II} (11V, 2A) \xrightarrow{III} (14V, 0A)$. A alternativa (c) é falsa.
- $(8V, 11A) \xrightarrow{B} (5V, 15A) \xrightarrow{A} (1V, 21A) \xrightarrow{II} (4V, 16A)$. A alternativa (d) é falsa.
- $(8V, 11A) \xrightarrow{I} (9V, 7A) \xrightarrow{III} (12V, 5A) \xrightarrow{B} (9V, 9A)$. A alternativa (e) é falsa.

Portanto, a alternativa correta é a letra (B).

3. Certo dia, o Sr. Daniel resolveu medir a altura de suas filhas, Alice, Beatriz e Dafne. Sendo professor de matemática, registrou suas alturas, respectivamente, como $\frac{15}{17}$, $\frac{11}{13}$ e a dízima periódica $0,\overline{8}$. Assinale a alternativa que dispõe as três filhas do Sr. Daniel em ordem crescente de altura.

(A) Alice, Beatriz e Dafne.

(B) Alice, Dafne e Beatriz.

(C) Beatriz, Alice e Dafne.

(D) Beatriz, Dafne e Alice.

(E) Dafne, Alice e Beatriz.

Solução: Note que

$$0,888\ldots = \frac{8}{9}.$$

Podemos, então, comparar as frações duas a duas. Como

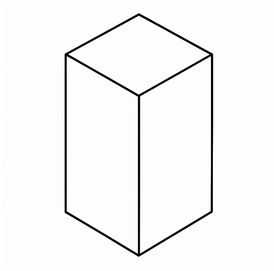
$$\begin{aligned}\frac{11}{13} < \frac{15}{17} &\Leftrightarrow 17 \cdot 11 < 15 \cdot 13\\ &\Leftrightarrow 187 < 195,\end{aligned}$$

vemos que Beatriz é menor que Alice. Do mesmo modo, como

$$\begin{aligned}\frac{15}{17} < \frac{8}{9} &\Leftrightarrow 15 \cdot 9 < 17 \cdot 8\\ &\Leftrightarrow 135 < 136,\end{aligned}$$

resulta que Alice é menor que Dafne. Portanto, a resposta correta é a letra (**C**).

4. Leonardo construiu um banco de madeira com o formato de um paralelepípedo retangular cuja base é quadrada, conforme a figura abaixo.



Ele pretende pintar as quatro faces laterais (excluindo o topo e o fundo) usando as cores vermelho e azul, de modo que cada face lateral seja inteiramente de uma única cor.

Sabendo que duas pinturas são consideradas iguais se uma puder ser obtida da outra por uma rotação de 90°, 180° ou 270° em torno do eixo vertical (ou seja, girando o banco sem virá-lo de cabeça para baixo), de quantos modos distintos Leonardo pode pintar o banco?

(A) 2

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) 16

Solução: Vamos dividir o problema em 3 casos:

- *Todas as faces com a mesma cor.* Aqui, há 2 configurações possíveis: todas as faces na cor azul ou todas na cor vermelho.
- *Três faces com a mesma cor e outra com outra cor.* Neste caso, há 2 configurações possíveis: três faces na cor azul e outra na cor vermelho ou três faces na cor vermelha e outra na cor azul.
- *Duas faces com uma cor e duas faces com outra cor.* Novamente, temos 2 configurações possíveis: alternando as cores entre azul e vermelho ou pintando duas faces adjacentes de vermelho e as outras duas de azul.

Assim, temos 6 modos distintos de pintar as faces laterais do banco. Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

5. Pedro foi visitar sua amiga Tina e, ao chegar lá, encontrou uma caixa cheia de biscoitos sortidos! Dentro havia 10 biscoitos de chocolate, 9 de morango, 8 de doce de leite e 7 de baunilha.

Tina, que adora um bom desafio, disse o seguinte: **"Você pode ir pegando os biscoitos, um por um, sem olhar! Assim que tirar 3 do mesmo sabor, poderá ficar com eles e devolver o resto."**

Qual a menor quantidade de biscoitos que Pedro precisa retirar para garantir um trio de biscoitos com o mesmo sabor?

(A) 7

(B) 8

(C) 9

(D) 10

(E) 11

Solução: Para evitar formar um trio, Pedro pode retirar, no máximo, 2 biscoitos de cada sabor. Como há 4 sabores, Pedro pode retirar no máximo 8 biscoitos sem que necessariamente tenha um trio de biscoitos com o mesmo sabor. Consequentemente, ele precisa retirar 9 biscoitos para garantir três biscoitos com o mesmo sabor. Portanto, a alternativa correta é a letra (C).

6. Uma criança, brincando na praia, carrega um balde totalmente cheio de água. Em um determinado momento, ela acidentalmente derrama 20% da água do balde. Depois de algum tempo, usa 1 litro da água restante na sua brincadeira.

Sabendo que a quantidade de água que ainda resta no balde corresponde a um terço da quantidade de água que foi derramada antes da brincadeira, assinale a alternativa que corresponde ao volume do balde, em litros.

(A) $\frac{11}{10}$

(B) $\frac{12}{11}$

(C) $\frac{13}{11}$

(D) $\frac{14}{11}$

(E) $\frac{15}{11}$

Solução: Seja V o volume do balde e, consequentemente, o volume inicial da água no balde, pois, por hipótese, o balde está totalmente cheio de água. Inicialmente, a criança derrama 20% da água, logo resta 80% da água, isto é, $0,8V$ de água no balde. Em seguida, a criança utiliza 1 litro da água restante, restando, após isso, $0,8V - 1$ litro de água no balde. Como a quantidade de água que ainda resta no balde corresponde a um terço da quantidade de água que foi derramada antes da brincadeira, vem que

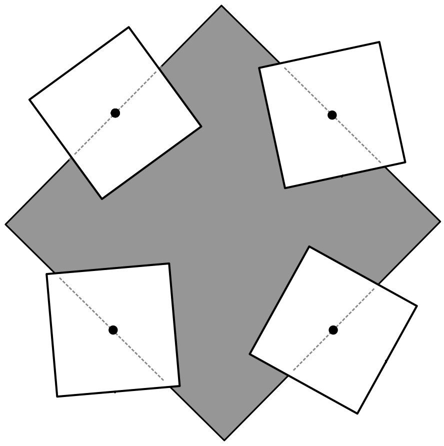
$$0,8V - 1 = \frac{1}{3} \cdot 0,2V.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0,8V - 1 &= \frac{1}{3} \cdot 0,2V \\ 0,8V - 1 &= \frac{0,2V}{3} \\ 2,4V - 3 &= 0,2V \\ 2,2V &= 3 \\ V &= \frac{3}{2,2} = \frac{15}{11}. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (E).

7. Na Quadradolândia, um parque temático resolveu construir um brinquedo tipo carrossel inspirado no símbolo da OPEMAT. O carrossel foi construído da seguinte forma: quatro cabines quadradas de lado 2 são colocadas sobre os lados de uma plataforma quadrada de lado 5 de modo que o centro de cada cabine está posicionada nos pontos médios dos lados da plataforma. Durante seu funcionamento, tanto a plataforma quanto as cabine giram em torno de seus centros de forma aleatória, conferindo momentos de fortes emoções. Em determinado instante, uma vista de cima do brinquedo está representada pela figura a seguir.



Com respeito à medida S da área sombreada que é interna ao quadrado maior e externa aos menores, é correto afirmar que:

(A) O valor de S é igual a 17.

(B) O valor de S está entre 10 e 16.

(C) O valor de S é menor que ou igual a 9.

(D) O valor de S é maior que ou igual a 18.

(E) O valor de S depende da posição específica das cabines.

Solução: Uma reta que passa pelo centro de um quadrado divide-o em duas regiões de mesma área. Assim,

$$S = 25 - 4 \cdot \frac{4}{2} = 17.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (A).

8. Numa fábrica, há três sirenes de aviso: a sirene A toca a cada 18 minutos, a sirene B toca a cada n minutos e a sirene C toca a cada 45 minutos.

Por uma questão de troca de turnos, o supervisor determinou que as sirenes A e B tocam juntas a cada 180 minutos, sendo esse o menor intervalo entre toques simultâneos para essas duas sirenes.

Além disso, o maior intervalo inteiro de tempo que divide tanto a frequência da sirene C quanto a frequência da sirene B é de 15 minutos.

Com essas informações, assinale a alternativa que corresponde ao valor de n.

(A) 30

(B) 45

(C) 60

(D) 90

(E) 180

Solução: Pelo exposto no enunciado temos que $\text{mdc}(18, n) = 180$ e $\text{mdc}(n, 45) = 15$.

Note que

$$\begin{aligned} 18 &= 2 \cdot 3^2, \\ 180 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5, \\ 45 &= 3^2 \cdot 5, \\ 15 &= 3 \cdot 5. \end{aligned}$$

Seja $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$. Segue que:

Pela condição do mínimo múltiplo comum, temos

$$\text{mmc}(n, 18) = \text{mmc}(2^a \cdot 3^b \cdot 5^c, 2 \cdot 3^2) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5,$$

do que obtemos $a = 2$, $b \in \{0, 1, 2\}$, e $c = 1$.

Pela condição do máximo divisor comum, temos

$$\text{mdc}(n, 45) = \text{mdc}(2^2 \cdot 3^b \cdot 5, 3^2 \cdot 5) = 3 \cdot 5,$$

do que obtemos $b = 1$.

Concluímos, portanto, que $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Portanto, a alternativa correta é a letra (C).

9. Numa turma com 30 estudantes, a professora Helena vai dividir a turma aleatoriamente em 6 grupos de 5 estudantes cada. Qual é a probabilidade de as amigas Duda e Bella ficarem no mesmo grupo?

(A) $\dfrac{2}{5}$

(B) $\dfrac{1}{6}$

(C) $\dfrac{1}{15}$

(D) $\dfrac{4}{29}$

(E) $\dfrac{5}{29}$

Solução: Fixemos Duda em um grupo qualquer. Observe que há 4 posições restantes no grupo de Duda e há 29 posições possíveis nesta distribuição. Então, a probabilidade de Bella ficar no grupo da Duda é:

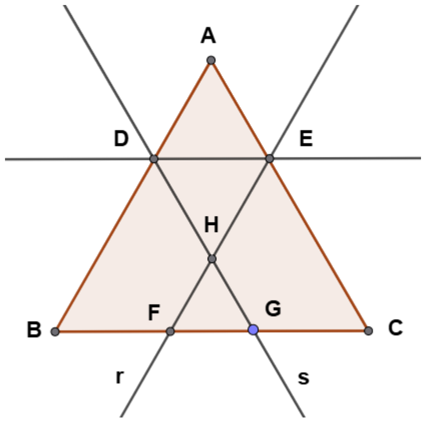
$$\frac{4}{29}.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

10. Durante uma brincadeira com carrinhos de Hot Wheels, João desenhou o esboço de uma pista no formato de um triângulo equilátero ABC, com perímetro de 3 metros. Para deixar o circuito mais interessante, ele adicionou um segmento DE, paralelo ao lado BC e duas pistas especiais:

- A pista r, paralela ao lado AB, que intersecta os lados AC e BC nos pontos E e F, respectivamente;
- A pista s, paralela ao lado AC, que intersecta os lados BC e AB nos pontos G e D, respectivamente.

Essas duas pistas se intersectam em um ponto estratégico H, localizado no interior do triângulo ABC, conforme ilustra a figura abaixo.



Sabendo que o perímetro do triângulo FGH é igual à metade do perímetro do triângulo ADE, assinale a alternativa que corresponde ao perímetro em metros do triângulo ADE.

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{2}{5}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{6}{5}$

Solução: Como as retas r e s são paralelas aos lados AB e AC, o segmento DE é paralelo ao segmento BC e o triângulo ABC é equilátero então usando as noções básicas da geometria plana, concluimos que se $\overline{AD} = \overline{AE} = \overline{DE} = x$ então $\overline{GC} = x$ e $\overline{BF} = x$. Como o perímetro do triângulo equilátero ABC é 3 m então $1 = \overline{BC} = \overline{BF} + \overline{FG} + \overline{GC} = x + \overline{FG} + x$. Logo, $\overline{FG} = 1 - 2x$. Pelos mesmos arguementos acima, o triângulo FHG é equilátero e portanto seu perímetro é $3(1 - 2x)$. Pelo contexto, segue que

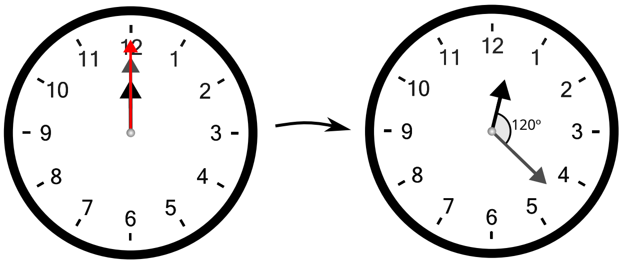
$$\begin{aligned} 3(1-2x) &= \frac{1}{2}(3x) \\ 6 - 12x &= 3x \\ x &= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Logo, o perímetro procurado é

$$3 \cdot x = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (E).

11. Imagine um relógio analógico tradicional marcando exatamente 12:00:00. Após algum tempo, os ponteiros das horas e dos minutos formam pela primeira vez um ângulo de 120° entre si, conforme ilustrado na figura abaixo.



Assinale a alternativa que melhor representa a posição do ponteiro dos segundos no mostrador do relógio no instante de tempo considerado.

(A) Entre 1 e 2

(B) Entre 3 e 4

(C) Entre 6 e 7

(D) Entre 9 e 10

(E) Entre 12 e 1

Solução: Cada segundo corresponde a uma movimentação de 6° no ponteiro dos segundos, assim como cada minuto corresponde a uma movimentação de 6° no ponteiro dos minutos. Cada hora corresponde a uma movimentação de 30° no ponteiro das horas. Ou seja, $1'$ corresponde a uma movimentação de $0,5°$ no ponteiro das horas. O tempo necessário, em minutos, para o ângulo entre o ponteiro dos minutos e o ponteiro das horas, em graus, ser 120° é

$$6t - \frac{1}{2}t = \frac{11}{2}t = 120,$$

nos dando $t = 240/11 = 21,8$ minutos. Neste tempo, o ponteiro dos segundos se desloca $21,8 \cdot 360$ graus. Desconsiderando as voltas completas, sobram $0,8 \cdot 360 = 288°$. O ponteiro dos segundos está, portanto, entre 9 (270°) e 10 (300°). Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

12. Considere a multiplicação abaixo, em que as letras A, B e C representam um único dígito de (0 a 9):

$$\begin{array}{r} 2\ A\ B \\ \times\ C\ 3 \\ \hline 9\ 1\ 5\ 9 \end{array}$$

Sabendo que a multiplicação está correta, assinale a alternativa que corresponde ao valor do dígito que está na **segunda posição** do número de três algarismos.

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Solução: Fazendo as contas com os termos desconhecidos, obtemos:

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & A & B \\ & \times & C & 3 \\ \hline & 6 & 3A & 3B \\ 2C & AC & BC & \end{array}$$

O resultado da conta é 9159. Como o último dígito do resultado é 9, segue que $B \times 3 = 9$, logo $B = 3$. Olhando o primeiro dígito do resultado, segue que $2C < 9$.Note que $C = 1, 2, 3$ ou 4 (C não pode se ser zero, do contrário o resultado da multiplicação teria 3 dígitos).

Olhando para o segundo dígito temos que $3A + BC = 3(A + C)$ deve deixar resto 5 na divisão por 10 e deve ser múliplo de 3. Logo, $3(A+C) = 15$ ou 45 ou 75 etc. $A+C < 9+4 = 13 \Rightarrow 3(A+C) = 15 < 39 < 45$. Olhando para o dígito das dezenas do resultado, considerando que do dígito das dezenas para centenas o "noves fora" foi 1, obtemos $6 + AC + 1$ deixa resto 1 na divisão por 10.

Só temos quatro possibilidades de valores para A e C.

1. $A = 1$, $C = 4$;
2. $A = 4$, $C = 1$;
3. $A = 2$, $C = 3$;
4. $A = 3$, $C = 2$

Em todo caso $AC \leq 6$, o que nos dá $6 + AC + 1 < 20$ e assim o "noves fora" do dígito das centenas para o dígito do milhar também é 1. Desse modo, $4C + 1 = 9$ fornecendo $C = 4$ e $A = 1$. Portanto, a alternativa certa é (B).

Gabarito - Nível 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	A	A	A	A	A	**A**	A	A	A	A	A
B	**B**	B	B	B	B	B	B	B	B	B	**B**
C	C	**C**	C	**C**	C	C	**C**	C	C	C	C
D	D	D	**D**	D	D	D	D	**D**	D	**D**	D
E	E	E	E	E	**E**	E	E	E	**E**	E	E