



Olimpíada Pernambucana de Matemática 2024

Segunda Fase - Nível 3 (Ensino Médio)

CADERNO DE QUESTÕES



Nome completo do(a) aluno(a): _____.

Número da identidade: _____ Órgão Expedidor: _____.

Assinatura: _____.

LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.
02. Preencha os dados pessoais.
03. A prova é composta de 5 questões dissertativas: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos.
04. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.
05. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.
06. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.
07. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.
08. Se a Comissão considerar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.
09. Duração da prova: 4 horas.

Realização



UNIVERSIDADE
FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Apoio



Acesse nosso site e nosso instagram:



www.opemat.com.br



www.instagram.com/opemat.ufrpe/

1. Dado um número natural $n > 0$, definimos a operação unária n^* por

$$n^* = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

Encontre os números naturais n menores que 100 tal que n^* termina com a maior quantidade de zeros.

Observação: A quantidade de zeros em que um número n^* termina é o maior número $k \in \mathbb{N}$ tal que $n^* = a \cdot 10^k$, onde $a \in \mathbb{N}$.

Solução:

2. Quantos são os divisores positivos de 2024^{2024} que são divisíveis por exatamente 2024 inteiros positivos?

Solução:

3. Para cada número inteiro positivo n associamos um número inteiro não negativo $f(n)$ de modo que se cumpram as seguintes regras:

1. $f(ab) = f(a) + f(b)$;
2. $f(n) = 0$ se n é um primo maior que 10;
3. $f(1) < f(3^5) < f(2) < 11$.

Sabendo que $f(2106) < 11$, qual o valor de $f(96)$?

Solução:

4. Uma folha de papel na forma de um quadrado $ABCD$ de lado 10cm , é recortada e dobrada da seguinte forma: a partir dos pontos médios M e N dos segmentos AB e CD , respectivamente, considere os pontos I e Y no segmento MN tais que Y é o centro do quadrado, I está entre M e Y e o segmento IY mede 1cm . Considere também o ponto S dentro do retângulo $AMND$ tal que o triângulo ISY é isósceles com ângulo da base $\widehat{SYI} = 45^\circ$. Em seguida, a folha é recortada ao longo dos segmentos MI , IS e NY e dobrada ao longo de IY e YS simultaneamente, conforme as etapas descritas nas Figuras de 1 a 4, resultando na Figura 5.

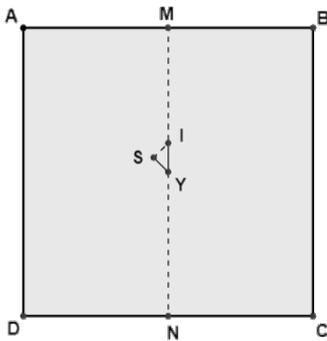


Figura 1

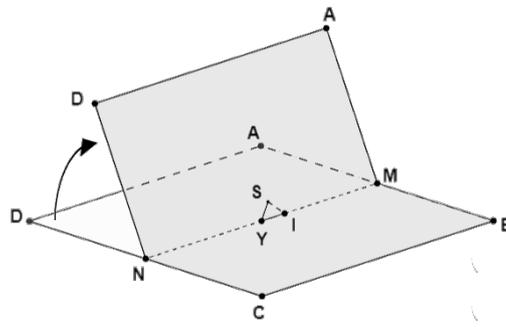


Figura 2

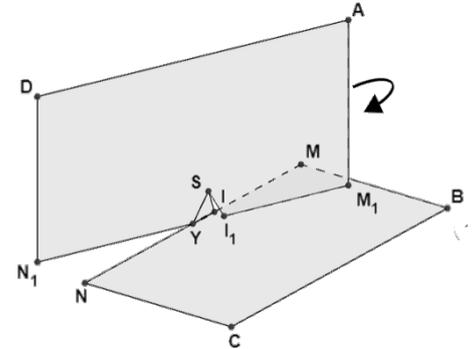


Figura 3

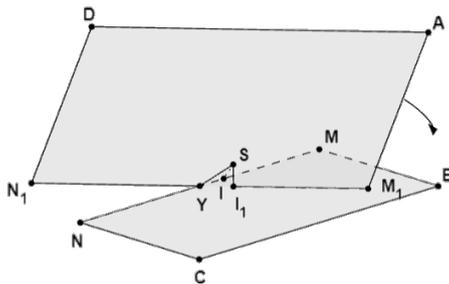


Figura 4

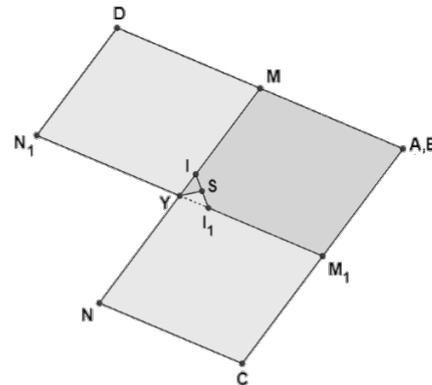


Figura 5

Se mudarmos as medidas dos ângulos da base do triângulo isósceles ISY de modo que $\widehat{SIY} = \widehat{SYI}$, $70^\circ < \widehat{SYI} < 75^\circ$, a área de ISY seja igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e fizermos uma dobra semelhante a descrita nas etapas acima, qual é o valor da área da região do retângulo $MBCN$ que será sobreposta pela região do retângulo AM_1N_1D após a dobra?

Solução:

5. Aline, Bárbara e Clara são as únicas atendentes do setor de vendas de uma empresa de telemarketing. As três recebem uma planilha, conforme abaixo, com informações de 2023 clientes que devem ser contactados:

Número	Nome	Atendente
1	Cliente 1	
2	Cliente 2	
3	Cliente 3	
⋮	⋮	
2023	Cliente 2023	

No intuito de dividir o trabalho entre si, as três começam a preencher a terceira coluna da planilha, informando quem irá contactar cada cliente. De quantos modos distintos isso pode ser feito, se cada atendente deve ligar para um número ímpar de clientes, e se cada cliente só pode ser contactado por exatamente uma atendente?

Solução: