Olimpíada Pernambucana de Matemática 2024

Segunda Fase - Nível 2 (8º e 9º anos)

CADERNO DE QUESTÕES

Nome completo do(a) aluno(a): ________________________________.

Número da identidade: ________________. Órgão Expedidor: ________________.

Assinatura: ________________________________.

LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. A prova é composta de 5 questões dissertativas: Para cada questão será atribuido um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos.

04. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

05. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

06. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

07. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.

08. Se a Comissão considerar que a resposta de uma quetão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anualda, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

09. Duração da prova: 4 horas.

Realização

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Apoio

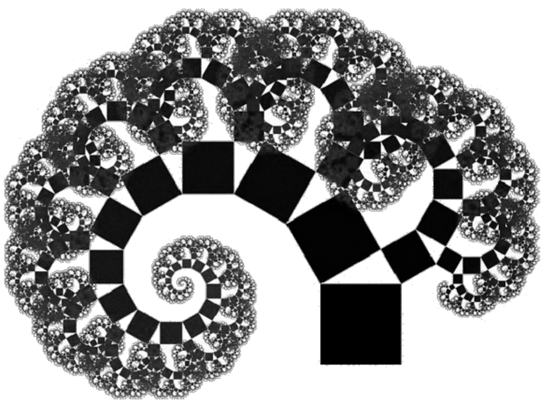
Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação — Governo Federal Brasil União e Reconstrução — Associação Olimpíada Brasileira de Matemática — stone — CNPq — Diretório Acadêmico Inovação Departamento de Matemática — UPE Universidade de Pernambuco — UNIVASF — Instituto Federal Pernambuco Campus Pesqueira — Editora Universitária da UFPE

Acesse nosso site e nosso instagram:

www.opemat.com.br

www.instagram.com/opemat.ufrpe/

1. As Árvores Pitagóricas são objetos fascinantes da Teoria dos Fractais, que ilustram como a matemática pode gerar figuras complexas a partir de formas geométricas simples. Esse processo criativo revela a beleza da matemática, onde simplicidade e complexidade se encontram. Um exemplo é apresentado na figura a seguir:



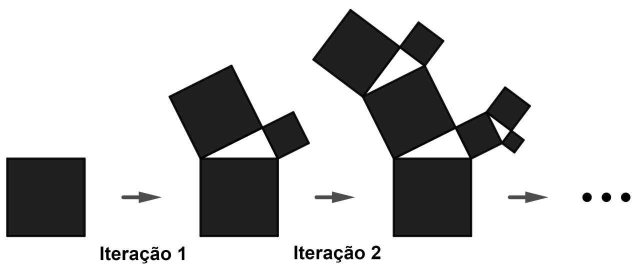
Inicialmente, temos um quadrado (tronco inicial da árvore) cujo lado mede L unidades de comprimento.

(i) Construímos sobre o lado oposto à base do quadrado, um triângulo retângulo, tendo este lado como hipotenusa;

(ii) Sobre cada cateto do triângulo anterior, construímos um quadrado tendo esse cateto como lado.

Para cada novo quadrado obtido, repetimos as construções descritas em (i) e (ii), considerando como base de cada quadrado os catetos obtidos na iteração anterior, de forma que os novos triângulos sobre os lados de cada novo quadrado sejam sempre semelhantes ao triângulo do item (i).

Na figura abaixo ilustramos algumas etapas do processo iterativo.



(A) Quantos quadrados obtemos ao realizarmos 10 iterações?

(B) Quantos triângulos obtemos ao realizarmos 20 iterações?

(C) Qual o valor da soma das medidas das áreas de todos os quadrados obtidos ao realizarmos n iterações?

Solução:

2. Os 15 membros da comissão de provas da OPEMAT estavam sentados em torno de uma mesa redonda quando, de repente, o coordenador da OPEMAT entra na sala, esbaforido, gritando:

– *"Pessoal, é urgente! Temos uma demanda enorme e pouca gente para ajudar. O que faremos agora?"* –
Após uma longa discussão, ele decide escolher aleatoriamente três membros da comissão de provas para auxiliá-lo nas tarefas pendentes.

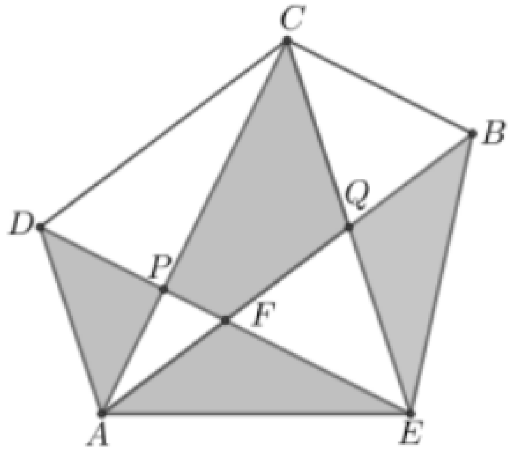
De quantas maneiras ele pode escolher estes três membros de forma que pelo menos dois destes estejam sentados um ao lado do outro?

Solução:

3. Um número natural n é dito **JOGLIANO** quando a soma dos algarismos de n é um múltiplo de 7 e a soma dos algarismos de seu antecessor, $n-1$, também é um múltiplo de 7. Por exemplo, 160.000 é um número **JOGLIANO** enquanto 361.004 não é. Determine o menor número **JOGLIANO**.

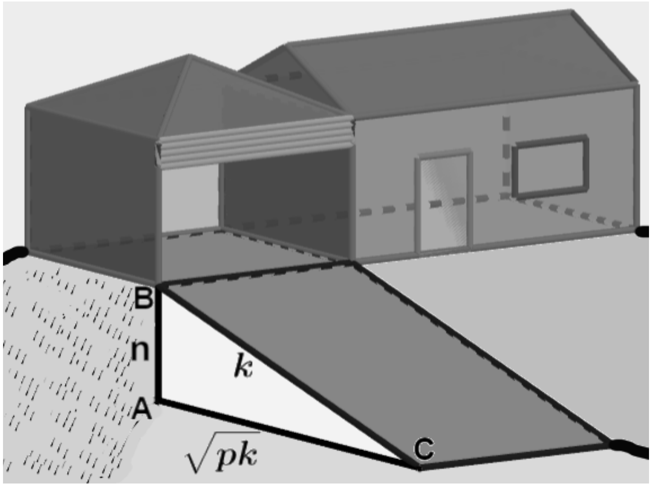
Solução:

4. Na figura a seguir, temos um pentágono $AEBCD$ formado pela sobreposição dos trapézios $ABCD$ e $BCDE$ tal que suas diagonais AB e DE são bases dos trapézios e intersectam-se no ponto F. Ainda, a diagonal CE intersecta AB no ponto Q, que é ponto médio do segmento FB; e a diagonal AC intersecta ED no ponto P, que satisfaz $DP = \frac{2}{3}DF$. Determine a área da região sombreada , sabendo que a área do pentágono é 24.



Solução:

5. O pai do π-raia está projetando uma nova rampa de acesso a garagem de sua casa conforme a figura abaixo.



Ele deseja que o comprimento k e a altura n da rampa projetada sejam números naturais. Sabendo que p é um primo ímpar, obtenha uma expressão para k dependendo de p (ou em função de p) de modo que estas condições sejam satisfeitas.

Solução: