Olimpíada Pernambucana de Matemática 2024

Primeira Fase - Nível 3 (Ensino Médio)

OPEMAT

EX SEMINE SEGES

CADERNO DE SOLUÇÕES

1. Em uma cerimônia de premiação com 60 pessoas contendo homens e mulheres, será sorteado um prêmio. Se 30% das pessoas usam relógio e 12 homens não usam, assinale a alternativa que corresponde a probabilidade de uma mulher que não usa relógio ser premiada.

(A) $\frac{1}{10}$

(B) $\frac{1}{12}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{10}$

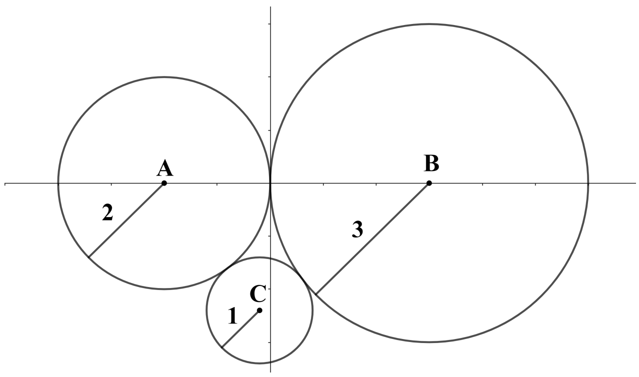
(E) $\frac{7}{10}$

Solução:
Pelo enunciado, sabemos que 18 pessoas usam relógio. Então, 42 é o número de pessoas que não usam relógio.
Como 12 homens não usam relógio então, segue que 30 mulheres não usam relógio.
Logo, a probabilidade de ser premiada uma mulher que não usa relógio é dada por

$$P = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (C).

2. Na figura abaixo, temos três circunferências tangentes entre si com raios medindo 1, 2 e 3 unidades de comprimento. Considere fixado um sistema de eixos cartesianos ortogonais xOy de modo que os centros das circunferências maiores sejam os pontos $A(-2, 0)$ e $B(3, 0)$.



Assinale a alternativa que corresponde às coordenadas do centro C da circunferência menor.

(A) $C\left(-\frac{1}{6}, -\frac{12}{5}\right)$

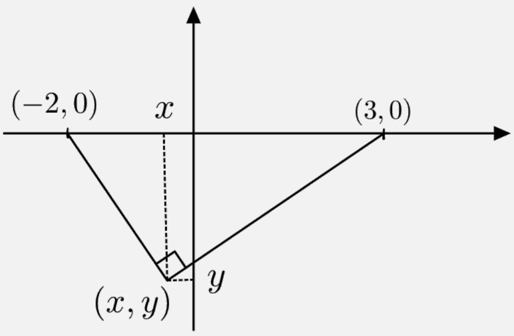
(B) $C\left(-\frac{1}{7}, -\frac{5}{2}\right)$

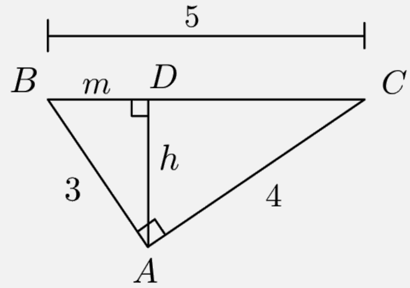
(C) $C\left(-\frac{2}{7}, -\frac{12}{5}\right)$

(D) $C\left(-\dfrac{1}{5}, -\dfrac{12}{5}\right)$

(E) $C\left(-\dfrac{2}{7}, -\dfrac{5}{2}\right)$

Solução:





Sabemos que os centros de dois círculos tangentes e o ponto de tangência são colineares. Logo, o triângulo ABC formado pelos centros dos círculos é tal que $AB = 3$, $AC = 4$ e $BC = 5$. Das relações métricas do triângulo retângulo, segue-se que: $5h = 3 \cdot 4$ e $3^2 = 5m$, ou seja, $h = \dfrac{12}{5}$ e $m = \dfrac{9}{5}$.
Logo, $x = -2 + m = -2 + \dfrac{9}{5} = -\dfrac{1}{5}$ e $y = -h = -\dfrac{12}{5}$.
Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

3. Considere a equação na incógnita x dada por

$$4x^2 - 4x + tg(c) = 0,$$

onde $\text{tg} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ é a função tangente e $c \in (\alpha, \beta) \subset \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
Sabendo que a equação acima não possui raiz real, assinale a alternativa que corresponde ao maior valor possível da diferença $\beta - \alpha$.

(A) $\dfrac{\pi}{6}$

(B) $\dfrac{\pi}{4}$

(C) $\dfrac{\pi}{3}$

(D) $\dfrac{\pi}{2}$

(E) π

Solução:
Como a equação $4x^2 - 4x + \text{tg}(c) = 0$ não possui raiz real então $\Delta = 16 - 16 \cdot \text{tg}(c) < 0 \implies \text{tg}(c) > 1$.
A solução da inequação trigonométrica $\text{tg}(c) > 1$ é dada por

$$S = \left\{ c \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \frac{\pi}{4} < c < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Logo, o maior valor possível da diferença $\beta - \alpha$ ocorre quando $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ e $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, pois, neste intervalo tg(c) > 1 é a condição para que a equação tenha duas raízes complexas.

Portanto, a alternativa correta é a letra (B).

4. Maria recebeu uma ligação de uma empresa de telemarketing e a atendente informou o número do protocolo de atendimento. Porém, houve um forte e prolongado ruído e Maria só ouviu o primeiro e o último algarismo falado pela atendente. Sabendo que o primeiro algarismo do número do protocolo é 4, o último é 5, todos os outros algarismos são iguais a zero e que este número é múltiplo de 27, assinale, dentre as alternativas abaixo, uma possível opção para o número informado.

(A) 40.000.005

(B) 40.000.000.005

(C) 4.000.000.000.000.005

(D) 400.000.000.000.000.005

(E) 4.000.000.000.000.000.005

Solução:
Seja $\mathbf{N}$ o número do protocolo. Note que os números de todas as alternativas são divisíveis por 3. Como $\mathbf{N}$ é divisível por 27, basta descobrir quantos zeros devem haver entre o 4 e o 5, de modo que ao dividir o número $\mathbf{N}$ por 3, o resultado seja um número divisível por 9. Dividindo qualquer um dos números das alternativas por 3, o resultado é um número da forma:

$$133\ldots335 = \frac{\mathbf{N}}{3}.$$

Logo, $\dfrac{\mathbf{N}}{3}$ deve ser da forma

$$1\overbrace{\;3\;}^{1}5\ ,\ \ 1\overbrace{3|333|}^{1+3}5\ ,\ \ 1\overbrace{3|333||333|}^{1+3.2}5\ ,\ \ \text{etc}\ 1\overbrace{3|333||333|\ldots|333|}^{1+3.n}5.$$

Assim,

$$\mathbf{N} = 3\cdot 1\overbrace{3|333||333|\ldots|333|}^{1+3.n}5 = 4\overbrace{0|000||000|\ldots|000|}^{1+3.n}5,$$

e a única alternativa que trás uma quantidade $1+3\cdot n,\ n\in\mathbb{N}$, de zeros é a letra (D), pois, $16 = 1+3\cdot 5$.

Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

5. Luiza possui 3 filhas: Ana, Camila e Tereza. Ana e Camila têm 6 e 8 anos, respectivamente. Luiza observou que multiplicando a sua idade pela idade de Ana e somando este valor à idade de Camila vezes a idade de Tereza, obteria como resultado o produto da sua idade pela idade de Tereza, subtraído de 1. Sabendo que Luiza tem mais de 30 anos, assinale a alternativa que corresponde a soma das idades de Luiza e Tereza?

(A) 28

(B) 36

(C) 50

(D) 64

(E) 66

Solução:

O problema equivale a encontrar os pares (x, y) de inteiros positivos que são soluções de

$$6x + 8y = xy - 1$$

e que satisfazem $x > 30$. Note que

$$(6 - y)(8 - x) = 6 \cdot 8 - 6x - 8y + xy = 48 + 1 = 49 = 7^2.$$

Como 7 é primo, devemos ter necessariamente

$$6 - y = \pm 1, \pm 7 \text{ ou } \pm 49.$$

Por inspeção, verifica-se que $x = 57$ e $y = 7$ é a única solução que cumpre $x > 30$.
Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

6. Considere um quadrado com lado ℓ. Vamos construir uma figura utilizando cada um dos segmentos desse polígono, seguindo o processo iterativo descrito a seguir:

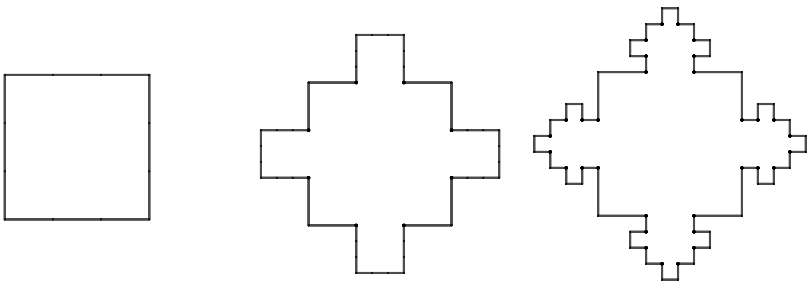
i) Dividimos cada um dos segmentos em 3 partes de medidas iguais;

ii) Usando cada segmento central, desenhamos um quadrado exterior a figura anterior;

iii) Removemos cada segmento central de cada quadrado adicionado;

iv) Para cada segmento adicionado, repetiremos os passos anteriores.

Na figura abaixo estão representados os resultados da primeira e da segunda iteração.



Iteração 1 Iteração 2

Assinale a alternativa que corresponde a área da figura resultante após infinitas iterações do processo acima.

(A) $\dfrac{7\ell^2}{3}$

(B) $\dfrac{3\ell^2}{15}$

(C) $\dfrac{5\ell^2}{3}$

(D) $\dfrac{3\ell^2}{2}$

(E) infinita

Solução:
Seja A a área do polígono resultante. Basta observar que os valores das áreas adicionadas em cada iteração estão em uma progressão geométrica de termo geral $a_n = 4.3^{n-1}.\left(\dfrac{\ell}{3^n}\right)^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ e razão $q = \dfrac{1}{3} < 1$.

Assim
$$A=\ell^2+S_\infty=\ell^2+\frac{a_1}{1-q}=\ell^2+\frac{4\left(\dfrac{\ell}{3}\right)^2}{1-\dfrac{1}{3}}=\frac{5\ell^2}{3}.$$
onde S_∞ é a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica.
Portanto, a alternativa correta é a letra (**C**).

7. Arthur está brincando com Dafne de escrever números usando expressões incomuns. Ele então escreveu o número
$$\frac{1}{(\sqrt[32]{2}+1)\cdot(\sqrt[16]{2}+1)\cdot(\sqrt[8]{2}+1)\cdot(\sqrt[4]{2}+1)\cdot(\sqrt{2}+1)}+1,$$
e desafiou Dafne a determiná-lo. Dentre as alternativas abaixo, assinale a que corresponde a uma resposta correta para o desafio.

(A) $\sqrt{2}$

(B) $\sqrt[4]{2}$

(C) $\sqrt[8]{2}$

(D) $\sqrt[16]{2}$

(E) $\sqrt[32]{2}$

Solução:
Observe que
$$\begin{aligned}1 &= (\sqrt{2})^2-1^2\\ &= (\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)\\ &= (\sqrt[4]{2}-1)\cdot(\sqrt[4]{2}+1)\cdot(\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$
Repetindo esse processo de forma iterativa, obtemos
$$1=(\sqrt[32]{2}-1)\cdot(\sqrt[32]{2}+1)\cdot(\sqrt[16]{2}+1)\cdot(\sqrt[8]{2}+1)\cdot(\sqrt[4]{2}+1)\cdot(\sqrt{2}+1).$$
Consequentemente,
$$x=\frac{1}{\sqrt[32]{2}-1}=(\sqrt[32]{2}+1)\cdot(\sqrt[16]{2}+1)\cdot(\sqrt[8]{2}+1)\cdot(\sqrt[4]{2}+1)\cdot(\sqrt{2}+1).$$
Logo,
$$(\sqrt[32]{2}-1)x=1 \implies \sqrt[32]{2}-1=\frac{1}{x} \implies \sqrt[32]{2}=\frac{1}{x}+1.$$
Portanto, a alternativa correta é a letra (E).

8. Alice, Beatriz e Dafne são as primeiras a chegar a uma festa de aniversário de crianças. Ao entrarem, seus pais lhes entregam 9 entradas para brincarem no pula-pula. Ao chegarem na atração, as três são informadas que é permitida a entrada de apenas uma criança por vez no brinquedo. Sabendo que cada uma delas deseja ir um número ímpar de vezes no pula-pula, assinale a alternativa que corresponde a quantidade de maneiras distintas que Alice, Beatriz e Dafne podem se organizar para entrar no brinquedo usando todas as entradas.

(A) 4704

(B) 4920

(C) 3520

(D) 1680

(E) 2220

Solução:
Primeiramente, note que cada maneira de se organizar a ida das 3 crianças ao brinquedo corresponde a um anagrama de comprimento 9, formado utilizando-se apenas as letras A, B e D, de tal modo que a quantidade de letras de cada tipo ocorre um número ímpar de vezes.

Precisamos considerar 3 casos:

(i) 1 criança brinca uma vez, outra criança brinca outra vez e a terceira criança brinca 7 vezes;

(ii) 1 criança brinca uma vez, outra criança brinca três vezes e a terceira criança brinca 5 vezes;

(iii) 1 criança brinca 3 vezes, outra criança brinca 3 vezes e a terceira criança brinca 3 vezes.

No primeiro caso, existem 6 modos de escolhermos as duas crianças que brincarão 1 vez cada. Em seguida, temos $C_9^2 = 36$ modos de escolhermos em que momento as duas crianças que irão brincar uma única vez, entrarão no pula pula. Portanto, existem $6 \cdot 36 = 216$ modos de se fazer isso. No segundo caso, temos 6 modos de escolhermos as duas crianças que brincarão 1 vez e 3 vezes, respectivamente. Daí, temos $C_9^1 \cdot C_8^3 = 504$ modos de escolhermos em que momento estas duas crianças entrarão no pula pula. Logo, temos $6 \cdot 504 = 3024$ modos de se fazer isso. Por fim, temos $C_9^3 \cdot C_6^3 = 1680$ modos de escolhermos os 3 momentos em que cada uma das três crianças entrará no pula pula. Segue que o número de maneiras de se organizar a ida das 3 crianças ao brinquedo, satisfazendo as condições dadas, é $216 + 3024 + 1680 = 4920$.

Portanto, a alternativa correta é a letra (B).

9. A professora Hebe criou um jogo educativo para seus alunos. Vence o jogo quem identificar entre três números apresentados qual é o maior e qual é o menor valor, respectivamente. Em uma das partidas, ela forneceu os seguintes números: $A = 10^{(\log_{10} 2024)^2}$, $B = 2024^3$ e $C = 2^{\sqrt{2024}}$. Assinale a alternativa que corresponde aos números, na ordem correta (maior e menor), que um aluno deve identificar para vencer esta partida.

(A) A e B

(B) C e A

(C) C e B

(D) B e A

(E) B e C

Solução:
Para solucionar a questão, deve-se ordenar os números A, B e C.
Note que

$$A = 10^{(\log_{10} 2024)^2} = 10^{(\log_{10} 2024)\cdot(\log_{10} 2024)} = \left[10^{(\log_{10} 2024)}\right]^{(\log_{10} 2024)} = 2024^{\log_{10} 2024}.$$

Sendo

$$\log_{10} 2024 > \log_{10} 1000 = 3,$$

resulta que,

$$A = 2024^{\log_{10} 2024} > 2024^3 = B.$$

Além disso,

$$2024 > 1936 = 44^2 \Leftrightarrow \sqrt{2024} > 44,$$

e, consequentemente,

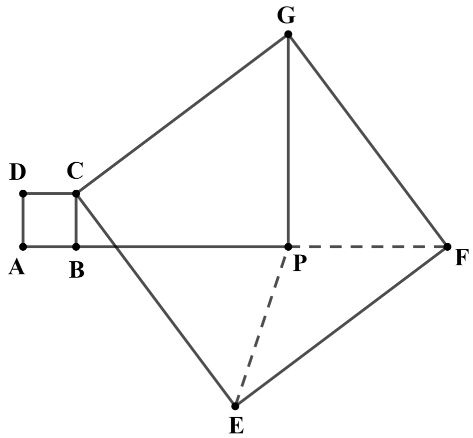
$$C = 2^{\sqrt{2024}} > 2^{44} = 2048^4 > 2024^4 = 2024^{\log_{10} 10000} > 2024^{\log_{10} 2024} = A.$$

Assim:

$$C > A > B\ .$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (C).

10. Na figura a seguir, o quadrado $CEFG$ possui apenas o vértice C em comum com o quadrado $ABCD$ de área 4. O ponto P de interseção da reta AB com sua perpendicular passando por G é tal que $PB = PG = 8$.



Em qual das alternativas encontra-se a área do triângulo PEF?

(A) 18

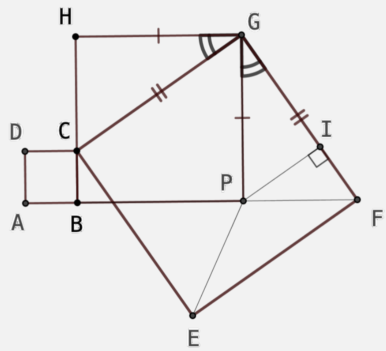
(B) 20

(C) 24

(D) 30

(E) 36

Solução:



Considerando o quadrado $BPGH$, note que

$$\angle HGC = \angle HGP - \angle CGP = 90^\circ - \angle CGP = \angle CGF - \angle CGP = \angle PGF.$$

Logo, os triângulos GHC e GPF são congruentes (critério LAL) e, consequentemente, $\angle GPF = 90^\circ$. Em particular, os pontos A, B, P e F são colineares. Além disso, $PF = HC = HB - BC = 8 - 2 = 6$.
Então, pelo teorema de Pitágoras, $FG = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.
Seja I a projeção ortogonal de P sobre GF. A altura do triângulo PEF relativa ao lado EF é dada pelo segmento IF. Das relações métricas no triângulo retângulo, temos: $IF \cdot FG = PF^2 \Rightarrow IF = \dfrac{36}{10}$.
Logo,

$$[PEF] = \frac{1}{2}EF \cdot IF = \frac{1}{2}10 \cdot \frac{36}{10} = 18.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (A).

11. Em uma conversa, sete amigos falam sobre suas idades. Eles observaram que a idade do meio, ou seja, a quarta idade quando listadas em ordem crescente, é a média aritmética de todas as suas idades. Além disso, a média aritmética das quatro maiores idades é 54 anos e a média aritmética das quatro menores idades é 36 anos. Qual das seguintes alternativas corresponde a soma de todas as idades desses amigos?

(A) 315

(B) 300

(C) 425

(D) 500

(E) 225

Solução:
Considerando $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ as idades dos setes amigos em ordem crescente, temos que a idade do meio é x_4.
Como, por hipótese, a média aritmética das quatro maiores idades é 54 e das quatro menores idades é 36, segue que

$$\frac{x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{4} = 54 \implies x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 54 \times 4 = 216$$

e

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 36 \implies x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 36 \times 4 = 144.$$

Somando as duas equações acima, obtemos

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) = 144 + 216 \implies S = 360 - x_4,$$

onde $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$.
Sabendo que x_4 é a média aritmética dos sete números, resulta que

$$x_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{7} = \frac{S}{7} = \frac{360 - x_4}{7}.$$

Resolvendo a equação para x_4:

$$7x_4 = 360 - x_4$$

$$8x_4 = 360$$

$$x_4 = 45.$$

Concluímos que

$$S = 360 - x_4 = 360 - 45 = 315.$$

Assim, a soma de todas as idades é 315. Portanto, a alternativa correta é a letra (A).

12. Um número natural é dito **SORTUDO** se a soma dos seus dígitos é igual a 7. Ordenando os números **SORTUDOS** em ordem crescente, obtemos uma sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, com $a_1 = 7$. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de n para o qual $a_n = 2023$.

(A) 63

(B) 64

(C) 65

(D) 66

(E) 67

Solução:
Considere a equação nas variáveis inteiras $x_1, \ldots, x_n$ dada por

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m, \tag{1}$$

onde $m,\ x_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Denotaremos a quantidade de soluções de (1) por $s(m, n)$. Sabemos que $s(m, n) = C^m_{m+n-1}$. Um número sortudo de n dígitos é um número da forma $\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}$ satisfazendo

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 7,$$

onde $x_1 \geq 1$ e $x_i \geq 0$ para $i = 2, \ldots, n$. Pondo $y_1 = x_1 - 1$, a equação acima equivale a

$$y_1 + x_2 + \cdots + x_n = 6,$$

onde $y_1 \geq 0$ e $x_i \geq 0$ para $i = 2, \ldots, n$. Portanto, a quantidade de números sortudos de n dígitos é dada por $s(6, n) = C^6_{n+5}$.

Como $a_n = 2023$ é um número sortudo da forma $\overline{2x_1x_2x_3}$, podemos determinar n contando a quantidade de números sortudos que o antecedem na sequência. Temos que

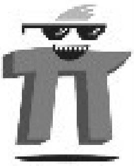
$$s(6,1) = C^6_6 = 1, \quad s(6,2) = C^6_7 = 7, \quad s(6,3) = C^6_8 = 28.$$

Em seguida, temos os números sortudos de 4 dígitos da forma $\overline{1x_1x_2x_3}$, que podem ser contados por $s(6,3) = C^6_8 = 28$. Por fim, temos os números sortudos de 4 dígitos da forma $\overline{200x_1}$ e $\overline{201x_1}$ que podem ser contados por $s(5,1) = C^5_5 = 1$ e $s(4,1) = C^4_4 = 1$. Como $a_n = 2023$ é o primeiro número sortudo da forma $\overline{202x_1}$, resulta que

$$n = 1 + 7 + 28 + 28 + 1 + 1 + 1 = 67.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (E).

Gabarito - Nível 3



Pi-raia
π-raia

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	A	A	A	A	A	A	A	A	●	●	A
B	B	●	B	B	B	B	●	B	B	B	B
●	C	C	C	C	●	C	C	●	C	C	C
D	●	D	●	●	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	●	E	E	E	E	●

Pi-veta
π-veta