Olimpíada Pernambucana de Matemática 2024

Primeira Fase - Nível 2 (8º e 9º anos)

OPEMAT

EX SEMINE SEGES

CADERNO DE SOLUÇÕES

1. Qual é o maior valor possível para c de tal forma que a equação $x^2 - 8x + c = 0$ tenha pelo menos uma raiz real?

(A) 13

(B) 14

(C) 15

(D) 16

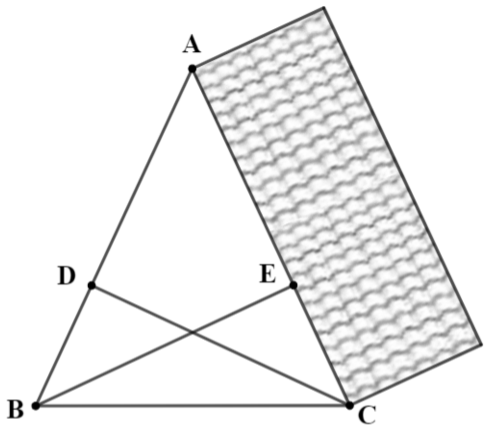
(E) 17

Solução:
O discriminante da equação $I : x^2 - 8x + c = 0$ é dado por

$$\Delta = 64 - 4c = 4(16 - c).$$

Como a equação I possui pelo menos uma raíz real então $\Delta \geq 0$, isto é, $c \leq 16$. Logo, o maior valor possível para c é 16.
Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

2. Um arquiteto está projetando a inclinação da estrutura da fachada de um telhado com formato triangular, conforme mostrado na figura abaixo



A construção será feita de modo que a medida do ângulo $\hat{A}$ seja $50°$ e, para garantir a rigidez da estrutura, é preciso colocar as sustentações BE e CD de modo que sejam perpendiculares aos lados do telhado AC e AB, respectivamente, e que possuam a mesma medida. Assinale a alternativa que corresponde a inclinação do lado BA do telhado, em relação à base BC.

(A) $50°$

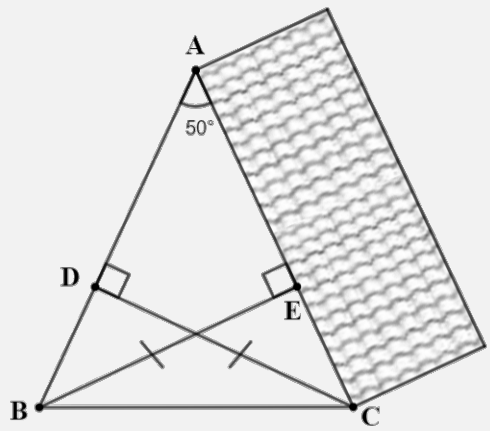
(B) $55°$

(C) $60°$

(D) $65°$

(E) $75°$

Solução:
Segundo os dados do enunciado, a configuração do problema pode ser dada pela figura a seguir:



Pelo critério de congruência ALA, os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle AEB$ são congruentes. Logo, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Isto mostra que o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles e consequentemente: $A\hat{B}C = A\hat{C}B$. Desde que $B\hat{A}C = 50°$ e a soma dos ângulos internos de um triângulo vale $180°$, segue que: $A\hat{B}C = A\hat{C}B = 65°$.
Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

3. Janaína gosta de quadrados perfeitos e sempre esta buscando formas diferentes de construí-los. Desta vez, ela esta procurando os inteiros positivos x tais que $x + 2x + \cdots + 100x$ seja um quadrado perfeito. Qual é o menor valor de x que Janaína pode encontrar?

(A) 101

(B) 100

(C) 202

(D) 505

(E) 50

Solução:
Note que $x+2x+\cdots+100x = x(1+2+\cdots+100) = \dfrac{x \times 100 \times 101}{2} = x \times 5^2 \times 2 \times 101$. Logo, $x = 2 \times 101 = 202$.
Portanto, a alternativa correta é a letra (C).

4. Isabela pratica natação, handebol, futebol, vôlei e basquete. Ela pratica um único esporte em cada um dos sete dias da semana. Sabe-se que ela pratica handebol três dias, mas nunca em dois dias consecutivos. Na segunda-feira, ela joga basquete, e na quarta-feira, vôlei. Além disso, Isabela pratica natação e joga futebol, mas não joga futebol se no dia anterior tiver jogado handebol ou praticado natação. Qual é o dia da semana em que Isabela pratica natação?

(A) Domingo

(B) Terça-feira

(C) Quinta-feira

(D) Sexta-feira

(E) Sábado

Solução:

- Domingo - Handebol
- Segunda-feira - Basquete
- Terça-feira - Handebol
- Quarta-feira - Vôlei
- Quinta-feira - Futebol
- Sexta-feira - Handebol
- Sábado - Natação

Portanto, a alternativa correta é a letra (E).

5. A distância entre dois números reais x e y com $x < y$ na reta numérica, é dada por $y - x$. Sabendo que a distância entre x e $-\dfrac{1}{x}$ é 3, onde x é um número positivo, assinale a alternativa que corresponde a distância entre $\sqrt{x}$ e $-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

(A) 1

(B) $\sqrt{3}$

(C) 2

(D) $\sqrt{5}$

(E) 5

Solução:
Note que o valor procurado é positivo. Seja $a = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Então,

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = a \quad &\Longrightarrow \quad x + 2 + \frac{1}{x} = a^2 \\ &\Longrightarrow \quad x + \frac{1}{x} = a^2 - 2 \\ &\Longrightarrow \quad 3 = a^2 - 2 \\ &\Longrightarrow \quad a^2 = 5 \\ &\Longrightarrow \quad a = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

6. Em uma folha de papel estão desenhados 7 pontos, sendo 5 azuis e 2 vermelhos, de acordo com as seguintes regras:

(i) Quaisquer dois pontos podem estar ligados por no máximo um segmento de reta;

(ii) Os pontos vermelhos não estão ligados entre si;

(iii) Cada ponto vermelho está ligado a todos os pontos azuis;

(iv) Todos os pontos azuis estão ligados entre si.

Denotando os pontos vermelhos por v_1 e v_2, de quantas maneiras diferentes podemos conectar o ponto v_1 ao ponto v_2 passando no máximo uma única vez por pelo menos um ponto azul?

(A) 650

(B) 7

(C) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$

(D) 325

(E) $5 + 4 + 3 + 2 + 1$

Solução:
Saindo de v_1, passando por exatamente um ponto azul, são 5 possibilidades; passando por dois pontos azuis, são $5 \times 4 = 20$ possibilidades; passando por três pontos azuis, são $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilidades. Seguindo este raciocínio, vemos que o número de possibilidades de sair de v_1 e ir para v_2 é

$$5 + 5 \times 4 + 5 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 \times 3 \times 2 + 5 \times 4 \times 3 \times 2 \cdot 1 = 325.$$

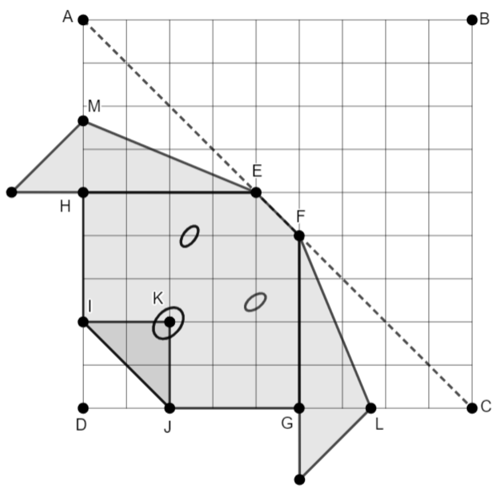
Portanto, a alternativa correta é a (D).

7. Para construir o origami "cabeça de cachorro", Chico utiliza um papel reticulado formado por quadrados de $1cm$ de lado, executando os seguintes passos:

i) Dobra o papel ao longo de sua diagonal formando um triângulo;

ii) Dobra o triângulo obtido no passo anterior a partir do ponto F, na figura abaixo, de forma que o segmento FC sobreponha o segmento FG, e a partir do ponto E, de forma que o segmento EA sobreponha o segmento EH;

iii) Dobra a forma resultante de modo que o ponto D sobreponha o ponto K e fazemos os olhos e o nariz obtendo o origami conforme a figura abaixo.



A área do origami "cabeça de cachorro" construído por Chico é:

(A) $\dfrac{110 - 32\sqrt{2}}{2}$

(B) $\dfrac{109 - 32\sqrt{2}}{2}$

(C) $\dfrac{117 - 32\sqrt{2}}{2}$

(D) $\dfrac{110 - 36\sqrt{2}}{2}$

(E) $\dfrac{117-16\sqrt{2}}{2}$

Solução:
Seja FL o segmento obtido pela dobra que sobrepõe os segmentos FC e FG onde L está no segmento CG. Seja C' o ponto correspondente de C obtido pela sobreposição de FC sobre FG.

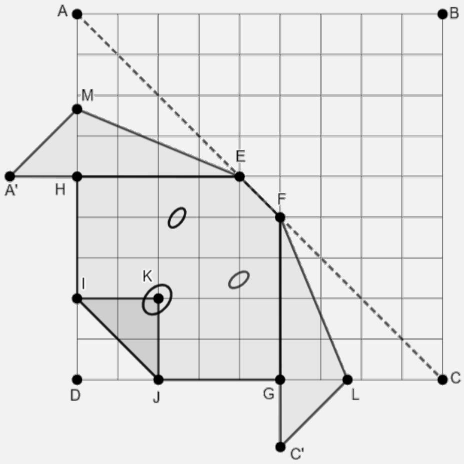


Figure 1

Assim,

$$GC' = FC' - FG = \left(9\sqrt{2} - 5\sqrt{2}\right) - 4 = 4\sqrt{2} - 4 = 4\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Agora, observe que o ângulo $L\hat{C}F = 45°$ e $C\hat{F}L = \dfrac{45°}{2}$. Logo, $F\hat{L}C = \dfrac{225°}{2}$ e como os triângulos $FC'L$ e FCL são congruentes (caso LLL), o ângulo $F\hat{L}C' = \dfrac{225°}{2}$. Além disso, $F\hat{L}C' = F\hat{L}G + G\hat{L}C'$ e $F\hat{L}G = \dfrac{135°}{2}$ (GLF é triângulo retângulo). Assim $G\hat{L}C' = 45°$ e como $L\hat{G}C' = 90°$, segue que $G\hat{C'}L = 45°$. Desta forma GLC' é isósceles.
Logo,

$$[FGL] = \frac{4.4\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} = 8\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Como por construção o triângulo GLC' é congruente ao triângulo HAM e o triângulo FGL é congruente ao triângulo EHM, a área A do origami cabeça de cachorro é dada por

$$A = \frac{1}{2}[ABCD] - \frac{1}{2}[DIJK] - 2.[FGL] = \frac{81}{2} - \frac{4}{2} - 2.\left(8\left(\sqrt{2}-1\right)\right) = \frac{109}{2} - 16\sqrt{2} = \frac{109-32\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto, a alternativa correta é a alternativa (B).

Solução 2:
A área da "orelha" $FC'L$ é dada por

$$\frac{\overline{FC'}\cdot\overline{GL}}{2} = \frac{\overline{FC'}\cdot\overline{GC'}}{2} = \frac{4\sqrt{2}\cdot(4\sqrt{2}-4)}{2} = 8\sqrt{2}(\sqrt{2}-1).$$

Pela construção, a área da outra "orelha" $A'ME$ é $8\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$.
A área do polígono $[EFGJIH]$ é dada por $25 - 2 - \dfrac{1}{2} = 23 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{45}{2}$.

Logo, a área do origami "cabeça de cachorro" é

$$16\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)+\frac{45}{2}=\frac{32\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)+45}{2}=\frac{109-32\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto, a alternativa correta é a alternativa (B).

8. Luiza possui 3 filhas: Ana, Camila e Tereza. Ana e Camila têm 6 e 8 anos, respectivamente. Luiza observou que multiplicando a sua idade pela idade de Ana e somando este valor à idade de Camila vezes a idade de Tereza, obteria como resultado o produto da sua idade pela idade de Tereza, subtraído de 1. Sabendo que Luiza tem mais de 30 anos, assinale a alternativa que corresponde a soma das idades de Luiza e Tereza?

(A) 28

(B) 36

(C) 50

(D) 64

(E) 66

Solução:
O problema equivale a encontrar os pares (x, y) de inteiros positivos que são soluções de

$$6x+8y=xy-1$$

e que satisfazem $x>30$. Note que

$$(6-y)(8-x)=6\cdot 8-6x-8y+xy=48+1=49=7^2.$$

Como 7 é primo, devemos ter necessariamente

$$6-y=\pm 1, \pm 7 \text{ ou } \pm 49.$$

Por inspeção, verifica-se que $x=57$ e $y=7$ é a única solução que cumpre $x>30$.
Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

9. Numa aula de Matemática, o Professor Paulo Santiago afirmou para seu aluno Pedro que existe um único número inteiro n tal que o número da forma n^2+n+1 é um divisor de n^3-n^2-2n+3 no conjunto dos números inteiros. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de n^2+n+1.

(A) 3

(B) 7

(C) 13

(D) 31

(E) 93

Solução:
Usando o algoritmo da divisão euclidiana, é possível concluir que

$$(n^3-n^2-2n+3)-(n-2)(n^2+n+1)=5-n.$$

A partir da relação acima, desde que n^2+n+1 divide n^3-n^2-2n+3 então n^2+n+1 divide $5-n$. Assim, $5-n=0$ ou $n^2+n+1\leq|5-n|$.
Logo, resolvendo a equação e a inequação modular acima, obtemos $n=5$ ou $n=1$.

Disto, $n = 5$ é o único inteiro positivo que satisfaz o problema inicial e daí, o maior valor possível para $n^2 + n + 1$ é $5^2 + 5 + 1 = 31$.
Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

10. Arthur está brincando com Dafne de escrever números usando expressões incomuns. Ele então escreveu o número

$$\frac{1}{(\sqrt[32]{2}+1)\cdot(\sqrt[16]{2}+1)\cdot(\sqrt[8]{2}+1)\cdot(\sqrt[4]{2}+1)\cdot(\sqrt{2}+1)}+1,$$

e desafiou Dafne a determiná-lo. Dentre as alternativas abaixo, assinale a que corresponde a uma resposta correta para o desafio.

(A) $\sqrt{2}$

(B) $\sqrt[4]{2}$

(C) $\sqrt[8]{2}$

(D) $\sqrt[16]{2}$

(E) $\sqrt[32]{2}$

Solução:
Observe que

$$\begin{aligned} 1 &= (\sqrt{2})^2 - 1^2 \\ &= (\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1) \\ &= (\sqrt[4]{2}-1)\cdot(\sqrt[4]{2}+1)\cdot(\sqrt{2}+1). \end{aligned}$$

Repetindo esse processo de forma iterativa, obtemos

$$1 = (\sqrt[32]{2}-1)\cdot(\sqrt[32]{2}+1)\cdot(\sqrt[16]{2}+1)\cdot(\sqrt[8]{2}+1)\cdot(\sqrt[4]{2}+1)\cdot(\sqrt{2}+1).$$

Consequentemente,

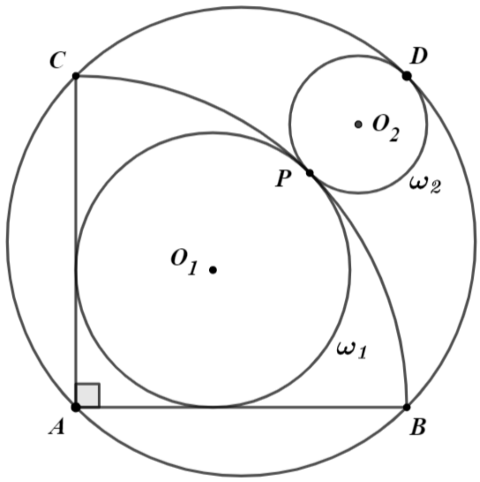
$$x = \frac{1}{\sqrt[32]{2}-1} = (\sqrt[32]{2}+1)\cdot(\sqrt[16]{2}+1)\cdot(\sqrt[8]{2}+1)\cdot(\sqrt[4]{2}+1)\cdot(\sqrt{2}+1).$$

Logo,

$$(\sqrt[32]{2}-1)x = 1 \implies \sqrt[32]{2}-1 = \frac{1}{x} \implies \sqrt[32]{2} = \frac{1}{x}+1.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (E).

11. Na figura abaixo, o círculo ω_1 de centro O_1 e raio r_1 está inscrito no setor circular CAB de centro A, e tangencia o arco BC e o círculo ω_2 de centro O_2 e raio r_2 no ponto P. Por sua vez, o círculo ω_2 é tangente ao círculo maior que passa pelos pontos ABC. Assinale a alternativa que corresponde à razão $\dfrac{r_1}{r_2}$.



(A) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

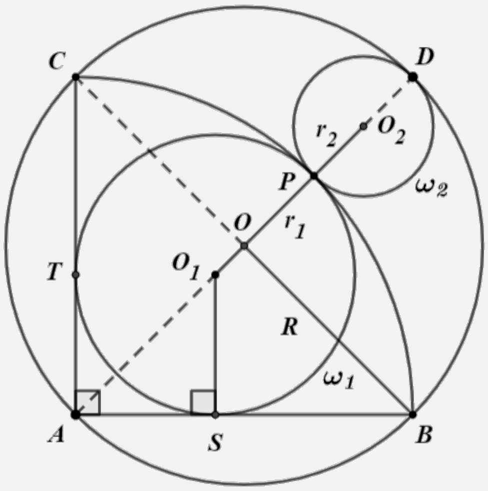
(B) $\frac{5}{2}$

(C) 2

(D) $\frac{6}{\sqrt{2}}$

(E) $2\sqrt{2}$

Solução:
Sejam S e T os pontos de tangencia do círculo ω_1 com o setor circular ABC. Seja O o centro do círculo que passa por A, B e C e tem raio $R = OA = OB = OC = OD$.



Vamos calcular os raios r_1 e r_2 em termos do raio R. Pelo teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos retângulos $\triangle ASO_1$ e $\triangle ABO$, obtemos respectivamente,

$$AO_1 = \sqrt{2}\, r_1 \quad e \quad AB = AC = AP = \sqrt{2}\, R.$$

Agora,

$$R = OD = OP + PD = (AP - AO) + PD = \left(\sqrt{2}\, R - R\right) + 2r_2.$$

Segue que, $r_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} R$. Por outro lado,

$$\sqrt{2}\, R = AP = AO_1 + O_1P = \sqrt{2}\, r_1 + r_1.$$

Isto fornece, $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} R$. Logo,

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 2 + 2 - \sqrt{2}} = 2.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (C).

12. Joana organizou uma loteria com 2024 bilhetes, escrevendo na frente de cada bilhete um número n em vermelho, com $1 \leq n \leq 2024$, e no verso, o número $(2024 - n)$ em azul. Joana estabeleceu como regra que um bilhete é premiado se o produto entre o número que está na frente e o número que está no verso é múltiplo de 2024. Se um bilhete é sorteado ao acaso, qual a probabilidade de que seja um bilhete premiado?

(A) $\dfrac{1}{1012}$

(B) $\dfrac{1}{2024}$

(C) $\dfrac{3}{1012}$

(D) $\frac{3}{2024}$

(E) $\frac{5}{2024}$

Solução:
Seja P_n ($n = 1, \ldots, 2024$) o produto entre o número da frente e o número do verso do n-ésimo bilhete. Então,

$$P_n = n \cdot (2024 - n) = 2024n - n^2, \quad n = 1, \ldots, 2024.$$

Sendo $2024n$ múltiplo de 2024, o produto P_n será múltiplo de 2024 se, e somente se, n^2 for múltiplo de 2024. Observando que $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, temos que n^2 é múltiplo de 2024 se, e somente se, n é múltiplo de $2^2 \cdot 11 \cdot 23$, ou seja, se, e somente se, n é múltiplo de 1012. Temos que, entre 1 e 2024, há $\frac{2024}{1012} = 2$ múltiplos de tal número. Portanto, há 2 bilhetes premiados.
Como há um total de 2024 bilhetes, resulta que a probabilidade de que um bilhete sorteado ao acaso seja premiado é 2/2024, ou seja, 1/1012.
Portanto, a alternativa correta é a letra (A).

Gabarito - Nível 2