Olimpíada Pernambucana de Matemática 2024

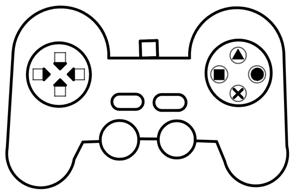
Primeira Fase - Nível 1 (6º e 7º anos)

OPEMAT

EX SEMINE SEGES

CADERNO DE SOLUÇÕES

1. Após uma aula sobre as quatro operações, Pedro decidiu inventar novas operações matemáticas inspiradas nos botões de controle de vídeo game.



Essas operações são denominadas por $\blacktriangle$ (chamada de "Operação Triângulo") e $\blacksquare$ (chamada de "Operação Quadrado"), e são definidas por:

$$a \ \blacktriangle \ b = 2 \cdot a - b \qquad \text{e} \qquad c \ \blacksquare \ d = c + 3 \cdot d.$$

Pedro então desafiou sua irmã Laura a resolver a seguinte equação:

$$(2 \ \blacksquare \ y) \ \blacktriangle \ 10 = 2 \ \blacktriangle \ (1 \ \blacksquare \ y).$$

Sabendo que a equação foi resolvida corretamente, determine a solução encontrada por Laura.

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) -1

Solução:
Resolvamos a equação substituindo as definições de $\triangle$ e $\square$:

$$\begin{aligned}
(2\square y)\triangle 10 &= 2\triangle(1\square y)\\
(2+3y)\triangle 10 &= 2\triangle(1+3y)\\
2(2+3y)-10 &= 2\cdot 2-(1+3y)\\
4+6y-10 &= 4-1-3y\\
9y &= 9\\
y &= 1
\end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (B).

2. Um terreno com formato triangular tem lados medindo $35m$, $28m$ e $21m$. Ele foi cercado de modo que as estacas (pedaços de madeira que sustentam a cerca) estão igualmente espaçadas ao longo de cada lado. Esse espaçamento é o mesmo em todos os lados, e há uma estaca em cada vértice do triângulo. Sabendo que a distância entre duas estacas vizinhas de cada lado é um número inteiro, assinale a alternativa que representa a menor quantidade possível de estacas que foram utilizadas.

(A) 12

(B) 13

(C) 15

(D) 21

(E) 30

Solução:
Chamaremos de d a distância entre duas estacas vizinhas ao longo de um lado. Conforme o enunciado, essa distância é sempre a mesma para cada par de estacas vizinhas.
Como há uma estaca em cada vértice do triângulo, isso só é possível se d for um divisor comum de 35, 28 e 21. Portanto, d pode ser igual a 1 ou a 7. Como queremos determinar a menor quantidade possível de estacas utilizadas, d deve ser o maior possível. Assim, concluímos que $d = 7$.
Vamos contar a quantidade de estacas utilizadas para cercar o terreno. Para isso, vamos contar as estacas em cada lado, incluindo as que estão posicionadas nas extremidades, que são os vértices do triângulo:

- No lado que mede 35, há $1 + 35 \div 7 = 6$ estacas.
- No lado que mede 28, há $1 + 28 \div 7 = 5$ estacas.
- No lado que mede 21, há $1 + 21 \div 7 = 4$ estacas.

Dessa forma, contamos $6 + 5 + 4 = 15$ estacas. No entanto, cada estaca nos vértices foi contada duas vezes (já que cada vértice é comum a dois lados). Como o triângulo possui 3 vértices, precisamos descontar três estacas da nossa contagem. Logo, foram utilizadas 12 estacas.
Portanto, a alternativa correta é a letra (A).

3. Laís desenhou um triângulo equilátero com lado de $16cm$ em uma folha em branco como mostrado na Figura 1. Em seguida, marcou os pontos médios de cada lado deste triângulo e traçou segmentos que uniram esses pontos, criando quatro triângulos equiláteros menores, como representado nas Figuras 2 e 3. Após isso, removeu o triângulo central, restando três triângulos equiláteros menores, conforme ilustrado na Figura 4.

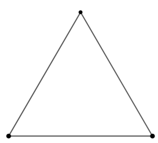


Figura 1

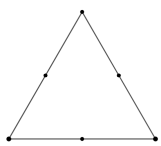


Figura 2

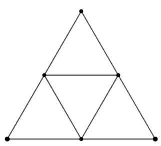


Figura 3

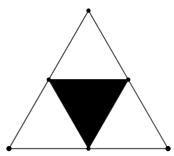


Figura 4

Utilizando os triângulos restantes, Laís repetiu o mesmo procedimento, gerando assim nove triângulos equiláteros, conforme visto na Figura 7.

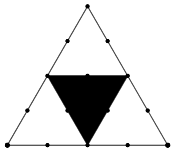


Figura 5

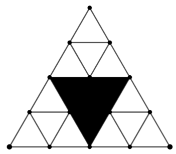


Figura 6

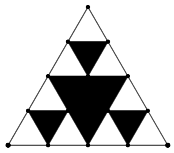


Figura 7

Podemos afirmar que o perímetro de um dos nove triângulos restantes é:

(A) 24

(B) 16

(C) 15

(D) 12

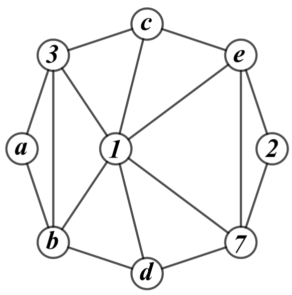
(E) 9

Solução:
Como o triângulo inicial (Figura 1) é equilátero com lado $16cm$, então, após dividir em quatro triângulos menores e remover o triângulo central, cada lado desses novos triângulos será metade do lado do triângulo inicial, ou seja, $8cm$. Após repetir o procedimento, cada um dos nove triângulos equiláteros restantes terá lado de $4cm$. Concluímos então que o perímetro corresponde a $3 \cdot 4 = 12cm$.
Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

4. Na figura abaixo, cada círculo deve conter um número entre 1 e 9 de modo que:

(i) Cada número apareça exatamente uma única vez;

(ii) Se os números x e y aparecem em círculos ligados por um segmento, então o máximo divisor comum de x e y é 1. Por exemplo, o máximo divisor comum de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ é 1, pois $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ estão ligados por um segmento na figura.



Qual das letras na figura representa o número 9?

(A) a

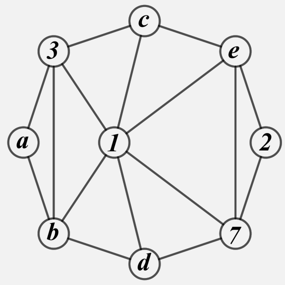
(B) b

(C) c

(D) d

(E) e

Solução:
Observando a disposição dos números, notamos que 9 é representado por **d** ou **e**. No primeiro caso não teríamos lugar para o 6.



Portanto, a alternativa correta é a letra (E).

5. Maria pegou dois papéis em formato de quadrado, cada um com área de $16cm^2$ e os recortou formando triângulos, quadrados e retângulos conforme visto nas Figuras 1 e 2. Utilizando algumas das peças dos quadrados que ela recortou, Maria construiu um "dinossauro", como ilustrado na Figura 3.

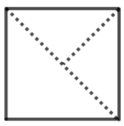


Figura 1

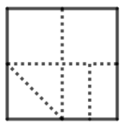


Figura 2

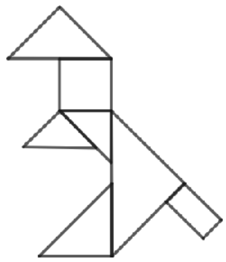


Figura 3

Sabendo que a Figura 2 é formada por quatro quadrados de mesma área, onde um deles é formado por dois retângulos também de mesma área, qual é a área do "dinossauro" construído por Maria?

(A) 16

(B) 26

(C) 28

(D) 30

(E) 32

Solução:
Como os quadrados maiores nas Figuras 1 e 2 possuem áreas de $16cm^2$, a medida de cada lado desses quadrados é de $4cm$. Portanto, cada quadrado menor na Figura 2 possui lado de $2cm$ e área de $4cm^2$. Cada retângulo na Figura 2 corresponde à metade da área de um quadrado menor, ou seja, possui área de $2cm^2$. É possível observar que as únicas peças que não foram utilizadas para construir o "cavalo" são um quadrado menor e um retângulo da Figura 2, totalizando $6cm^2$ de área não utilizada. Concluímos, portanto, que a área total da figura é: $16cm^2 + 16cm^2 - 6cm^2 = 26cm^2$.
Portanto, a alternativa correta é a letra (B).

6. Dois números inteiros positivos x e y obedecem a equação abaixo:

$$x^2 \cdot y = 6250.$$

Ao somar os dígitos do número x, obtemos um novo número z, que é diferente de x. Assinale a alternativa que corresponde ao número z.

(A) 3

(B) 5

(C) 7

(D) 12

(E) Nenhuma das alternativas acima

Solução:
A decomposição de 6250 em fatores primos é:

$$6250 = 5^5 \cdot 2.$$

Assim, temos exatamente três maneiras de escrever 6250 como x^2y, que são:

$$6250 = 1^2 \cdot 6250, \quad 6250 = 5^2 \cdot (5^3 \cdot 2) \quad \text{e} \quad 6250 = 5 \cdot 25^2 \cdot 2.$$

No primeiro caso, $x = 1$ que é um número cuja soma dos dígitos é igual ao próprio número. No segundo, $x = 5$ que também não serve pois a soma dos dígitos é igual ao próprio número. No terceiro caso, $x = 25$ e a soma dos seus dígitos é 7 que é diferente de x.
Portanto, a alternativa correta é a (C).

7. Mariana ganhou de sua tia um novo jogo de tabuleiro. O objetivo do jogo é preencher todo o tabuleiro seguindo as seguintes regras:

Regra 1: A soma de três casas vizinhas do tabuleiro na horizontal é igual a 6;
Regra 2: A soma de duas casas vizinhas do tabuleiro na vertical é igual a 4.

Mariana começou o jogo e preencheu algumas casas do tabuleiro. Sabendo que seu amigo Pedrinho estava chegando em sua casa e pretendendo propor-lhe um desafio, ela decidiu substituir alguns dos valores encontrados por letras, conforme mostra a figura abaixo.

a			***7***		
		3	***b***	***d***	
			c		
				f	

Podemos afirmar que a soma dos valores de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{f}$ encontrados por Pedrinho é:

(A) 13

(B) -14

(C) 8

(D) 20

(E) 11

Solução:
Pela regra 2, sabemos que a soma entre duas casas vizinhas na vertical é igual a 4, logo:

$$7 + b \;=\; 4 \;\Rightarrow\; b \;=\; -3 \qquad (1)$$

e

$$-3 + c = 4 \Rightarrow c = 7 \tag{2}$$

Pela regra 1, a soma de três casas vizinhas na horizontal é 6, disto:

$$3 - 3 + d = 6 \Rightarrow d = 6 \tag{3}$$

e consequentemente, pela regra 2

$$f = 6 \tag{4}$$

Considerando a sequência na horizontal

$$a \mid x \mid y \mid 7 \tag{5}$$

temos, também pela regra 1:

$$a + x + y = 6 \tag{6}$$
$$x + y + 7 = 6 \tag{7}$$

Logo,

$$a = 7 \tag{8}$$

Concluímos então que:

$$a + c + f = 7 + 7 + 6 = 20 \tag{9}$$

Portanto, a alternativa correta é a (D).

8. Um número de 8 dígitos é dito **EVOLUÍDO** se seus algarismos aparecem em ordem crescente da esquerda para a direita. Por exemplo, o número 12345678 é **EVOLUÍDO** e os números 11123456 e 16234578 não são. Assinale a alternativa que corresponde a quantidade de números **EVOLUÍDOS** que possuem 8 dígitos.

(A) 8

(B) 9

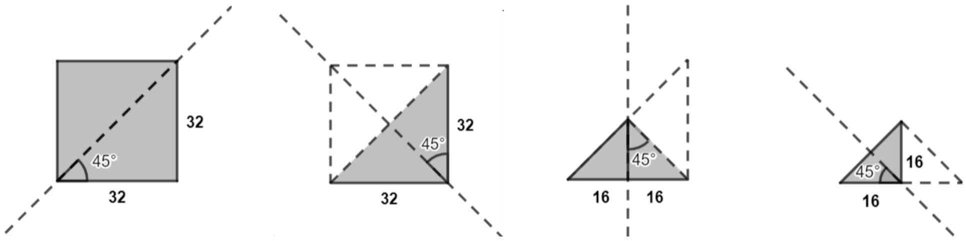
(C) 10

(D) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$

(E) 8^9

Solução:
Um número **EVOLUÍDO** tem 8 algarismos diferentes, sendo que 0 não pode ser um deles. Observe também que dados 8 dígitos é possível formar apenas um **EVOLUÍDO** com eles. Logo, basta escolher o algarismo que não estará na escrita decimal, o que pode ser feito de 9 maneiras diferentes.
Explicitamente: 1) 12345678 , 2) 12345679 , 3) 12345689 , 4) 12345789 , 5) 12346789 , 6) 12356789 , 7) 12456789 , 8) 13456789 , 9) 23456789 .
Portanto, a alternativa correta é a letra (B).

9. A professora Elisabete realizará uma atividade de dobradura com seus alunos. Eles receberão um papel no formato de um quadrado de lado $32cm$, e devem dobra-lo de modo que após cada dobra, os triângulos definidos pelas linhas de referência de dobradura (tracejadas em preto) sejam congruentes. Ilustramos algumas etapas a seguir:



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3 Etapa 4

Devido a "dureza" do papel, só é possível dobra-lo enquanto tivermos pelo menos um lado cuja medida é maior ou igual a $4cm$. Sabendo que a atividade termina quando não é mais possível fazer dobras, assinale a alternativa que corresponde ao número de dobras necessárias para um aluno concluir a atividade.

(A) 6

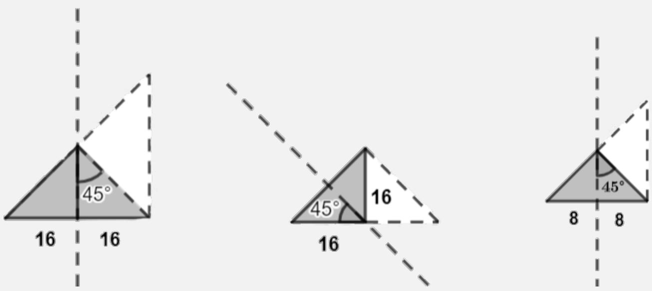
(B) 7

(C) 8

(D) 9

(E) 10

Solução:
Antes de tudo, note que todos os triângulos formados são retângulos e isósceles, com ângulos $45°$, $45°$ e $90°$. Perceba que a última dobra será dada num triângulo retângulo com hipotenusa medindo $4cm$ (logo os outros lados medem menos que $4cm$) com o eixo de dobradura o repartindo "ao meio" perpendicularmente no seu ponto médio. Devemos então contar o número mínimo de dobras necessários até chegar nesta configuração. Agora, perceba pela ilustração abaixo que para passarmos de um triângulo com hipotenusa $16cm$ para um triângulo com hipotenusa de $8cm$ é necessário duas dobras:



Etapa 3 Etapa 4 Etapa 5

Seguindo a mesma ideia, para sairmos de um triângulo com hipotenusa $8cm$ até um triângulo com hipotenusa $4cm$ é necessário mais duas dobras. Então o número mínimo total de dobras para um aluno realizar a atividade é:

$$\overbrace{2}^{\text{até hip. } 16cm} + \overbrace{2}^{\text{até hip. } 8cm} + \overbrace{2}^{\text{até hip. } 4cm} + \overbrace{1}^{\text{última dobra}} = 7$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (B).

10. João escreveu em ordem alfabética todos os anagramas da palavra OPEMAT. Assinale a alternativa que corresponde a 505^a palavra que João escreveu.
Observação: Um anagrama é qualquer reordenação das letras de uma palavra. Por exemplo, ROPAV é um anagrama da palavra PROVA.

(A) PEAMOT

(B) TAMEPO

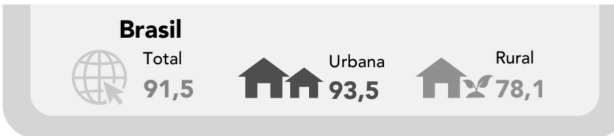
(C) MATEPO

(D) EMATOP

(E) PEMATO

Solução:
Contemos os anagramas da palavra OPEMAT que começam com a letra A. Temos 5 possibilidades para escolher a segunda letra, 4 possibilidades para a terceira letra, 3 para a quarta letra, 2 para a quinta letra e 1 possibilidade para a última letra. Pelo Princípio Multiplicativo, temos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ anagramas que começam com a letra A. Analogamente, para cada uma das letras E, M, O, existem 120 anagramas que começando com a letra dada.
Assim, ao colocarmos os anagramas em ordem alfabética, todos os $120 + 120 + 120 + 120 = 480$ anagramas começando com as letras A, E, M e O estarão listados primeiro. Continuando na lista, haverão $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ anagramas que tem P como a primeira letra e A como a segunda letra. Estes anagramas ocuparão as posições 481^o à 504^o na lista. A palavra que ocupa a 505^a posição então será PEAMOT.
Portanto, a alternativa correta é a letra (A).

11. Segundo dados do IBGE, em $91,5\%$ dos domicílios do país havia utilização do serviço de internet em 2022. No mesmo ano, nas zonas urbana e rural, os percentuais de utilização de internet por domicílio eram $93,5\%$ e $78,1\%$, respectivamente.



Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Pesquisas por Amostra de Domicílios, Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua 2022.

Qual é o valor que mais se aproxima da proporção entre domicílios urbanos e domicílios rurais em 2022, segundo tais dados

(A) $1,2$

(B) $3,2$

(C) $4,1$

(D) $5,4$

(E) $6,7$

Solução:
Sejam u e r o número de domicílios rurais e urbanos, respectivamente, e t o número total de domicílios. Do que foi dado, vale que:

$$78,1r + 93,5u = 91,5t$$

$$78,1r + 93,5u = 91,5(u + r)$$

Dividindo a equação por r, vem:

$$78,1 + 93,5\frac{u}{r} = 91,5\left(\frac{u}{r} + 1\right)$$

Daí:

$$(93,5 - 91,5)\frac{u}{r} = 91,5 - 78,1$$

O que dá:

$$\frac{u}{r} = \frac{13,4}{2} = 6,7$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (E).

Solução 2: Sejam u e r o número de domicílios rurais e urbanos, respectivamente, numa amostra de 100 domicílios em que as proporções entre os tipos de domicílios são respeitadas. Então:

$$78,1r + 93,5u = 91,5 \cdot 100$$

Note que $u = 100 - r$, do que segue que:

$$78,1r + 93,5(100 - r) = 9150$$

Isolando r:

$$15,4r = 200$$

O melhor inteiro que aproxima r é 13, o que dá $u = 87$. Daí: $\frac{u}{r}$ é aproximadamente 6,69.
Portanto, a alternativa correta é a letra (E).

12. João e Maria estavam ao telefone. Em um dado momento, João pediu para Maria anotar um número **N**. Porém, houve um forte e prolongado ruído e Maria só ouviu o primeiro e o último algarismo falado por João. Sabendo que o primeiro algarismo de **N** é 4, o último é 5, todos os outros algarismos de **N** são iguais a zero e que **N** é múltiplo de 27, qual das alternativas abaixo pode ser um possível valor para **N**?

(A) 40.000.005

(B) 40.000.000.005

(C) 4.000.000.000.000.005

(D) 400.000.000.000.000.005

(E) 4.000.000.000.000.000.005

Solução:
Note que os números de todas as alternativas são divisíveis por 3. Como o **N** é divisível por 27, basta descobrirmos quantos zeros devemos por entre o 4 e 5, de modo que ao dividirmos o número construído por 3, obtivermos um número divisível por 9. Agora, perceba que ao dividirmos qualquer número um dos números das alternativas por 3, obtemos números da forma:

$$1\overbrace{33\ldots33}^{\text{Quantos?}}5$$

Para que seja divisível por 9, devemos ter:

$$1\overbrace{\;3\;}^{1}5\ ,\ 1\overbrace{3|333|}^{1+3}5\ \ 1\overbrace{3|333||333|}^{1+3.2}5\ ,\ \text{etc}\ ,1\overbrace{3|333||333|\ldots|333|}^{1+3.n}5$$

Logo,

$$\mathbf{N} = 3 \times 1\overbrace{3|333||333|\ldots|333|}^{1+3.n}5 = 4\overbrace{0|000||000|\ldots|000|}^{1+3.n}5$$

A única alternativa que trás uma quantidade $1 + 3.n,\ n \in \mathbb{N}$, de zeros é a letra (D): $16 = 1 + 3.5$. Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

Gabarito - Nível 1