



Olimpíada Pernambucana de Matemática 2017

NÍVEL 3

Caderno de Questões



LEIA COM ATENÇÃO

- 01.** Só abra este caderno após ler todas as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.
- 02.** Preencha os dados pessoais.
- 03.** Não destaque as folhas desse caderno.
- 04.** A primeira questão é de proposições múltiplas; apresenta 5(cinco) alternativas para você decidir e marcar na coluna apropriada quais são verdadeiras e quais são falsas. As alternativas podem ser todas verdadeiras, todas falsas ou algumas verdadeiras e outras falsas. Na folha de respostas, as verdadeiras devem ser marcadas na coluna V; as falsas, na coluna F.
- 05.** A segunda e a terceira questões são numéricas, tem respostas cujos valores variam de 00 a 99 que devem ser marcados, na folha de respostas, no local correspondente ao número da questão. (Coluna d para as dezenas e coluna u para as unidades. Respostas com valores entre 0 e 9 devem ser marcadas antepondo-se zero (0) ao valor, na coluna d).
- 06.** As 3(três) últimas questões são discursivas e devem ser resolvidas, no caderno de prova, e na página onde estão enunciadas.
- 07.** Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.
- 08.** Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.
- 09.** Assinale as respostas de cada uma das 3(três) primeiras questões no corpo da prova e, só depois, transfira os resultados para a folha de respostas.
- 10.** Para marcar a folha de respostas, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul e faça as marcas de acordo com o modelo ● .
- 11.** A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.
- 12.** Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.
- 13.** Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.
- 14.** Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.
- 15.** Duração da prova: 4 horas.

NOME: _____

IDENTIDADE: _____ ÓRGÃO EXPEDIDOR: _____

ASSINATURA: _____

- 01.** Sejam L , M e N os pontos médios dos lados AC , AB e BC do triângulo ABC respectivamente. Seja D ponto de contato do círculo de centro S , inscrito ao triângulo LMN , com o lado LM . P_1P_2 denota o comprimento do segmento com extremidades em P_1 e P_2 , e $[P_1P_2P_3]$ denota a área do triângulo $P_1P_2P_3$. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.
- A– (V) (F) A área do quadrilátero $LMNC$ mede metade da área do triângulo ABC .
- B– (V) (F) Seja F o ponto de interseção da reta LS , com MN . Então $BC \cdot [LMF] = AB \cdot [LNF]$.
- C– (V) (F) Suponha $AB=42$, $AC=34$ e $BC=20$. Então o raio do círculo inscrito no triângulo LMN é igual a 7.
- D– (V) (F) O segmento MD mede metade de BN .
- E– (V) (F) Se E é o ponto de encontro da reta AD com o lado BC do triângulo ABC , então $AB+BE = AC+CE$.

- 02.** Um certo jogo de RPG tornou-se muito popular, como o jogo usava dados octaédricos regulares (como o balão de são joão), várias indústrias começaram a produzir dados octaédricos. Se uma empresa decide construir apenas dados tais que os números das faces opostas somam 9, qual é o o número de diferentes tipos de dados que podem ser construídos nestas condições?

- 03.** Um general deseja verificar o número de soldados em um de seus pelotões. Então, mandou que os soldados formassem alinhados de 9 em 9 e verificou que sobraram 2 soldados. Em seguida, ordenou que formassem alinhados de 11 em 11 e verificou que sobraram 4. Finalmente, fez os soldados se alinharem de 13 em 13 e sobraram 8. Sabendo que o pelotão têm entre dois mil e três mil soldados determine quantos soldados sobraram quando o general os mandou formar de 100 em 100.

- 04.** a) Sabendo que a média aritmética de k números positivos $x_1, x_2, \dots, x_k$ é maior ou igual que a média geométrica desses números:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} \geq \sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k},$$

mostre que

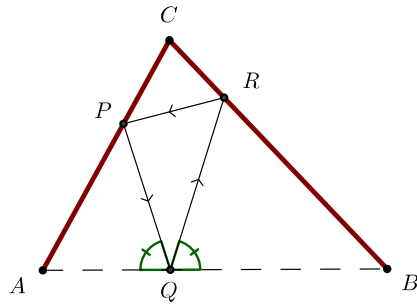
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_k}{x_1} \geq k.$$

- b) A alometria é a parte da biologia que estuda a variação na forma entre espécies e indivíduos da mesma espécie. As funções que descrevem esses fenômenos são ditas alométricas e são da forma $f(x) = a.x^b$, com $a, b > 0$. Considere a seguinte combinação de funções alométricas:

$$f : \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por $f(x) = (n+1)x^n - n.x^{n+1}$, com $n \in \mathbb{N}$. Verificar que f é limitada inferiormente por 0 e limitada superiormente por 1, ou seja, $0 \leq f(x) \leq 1$.

- 05.** Um garoto se posiciona em um ponto Q localizado entre os pontos A e B (ver figura) e chuta uma bola que bate na parede representada por BC , seguindo até a parede AC e volta precisamente ao ponto Q de onde foi chutada (sem perder contato com o solo) de modo que $\angle AQP = \angle BQR$. Mostre que o ponto Q é pé da altura relativa ao lado AB no triângulo ABC .



- 06.** Em algumas cidades do interior de Pernambuco costumava-se jogar, usando feijões, o seguinte jogo para dois jogadores: Dispunha-se sobre a mesa uma quantidade qualquer de feijões, digamos n feijões. Cada jogador tem que retirar um certo número de feijões que pode variar desde um feijão até uma quantidade que não seja maior que a número de feijões que ainda restarem na mesa após a jogada. Por exemplo, se restam 5 feijões sobre a mesa o próximo jogador a retirar pode retirar 1 ou 2 feijões. Perde o jogador que retirar o último feijão. Para quais valores de n o primeiro jogador pode encontrar uma estratégia vencedora? E o segundo jogador?

