



Olimpíada Pernambucana de Matemática 2017

NÍVEL 3

Caderno de Questões Com Resoluções



LEIA COM ATENÇÃO

- 01.** Só abra este caderno após ler todas as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.
- 02.** Preencha os dados pessoais.
- 03.** Não destaque as folhas desse caderno.
- 04.** A primeira questão é de proposições múltiplas; apresenta 5(cinco) alternativas para você decidir e marcar na coluna apropriada quais são verdadeiras e quais são falsas. As alternativas podem ser todas verdadeiras, todas falsas ou algumas verdadeiras e outras falsas. Na folha de respostas, as verdadeiras devem ser marcadas na coluna V; as falsas, na coluna F.
- 05.** A segunda e a terceira questões são numéricas, tem respostas cujos valores variam de 00 a 99 que devem ser marcados, na folha de respostas, no local correspondente ao número da questão. (Coluna d para as dezenas e coluna u para as unidades. Respostas com valores entre 0 e 9 devem ser marcadas antepondo-se zero (0) ao valor, na coluna d).
- 06.** As 3(três) últimas questões são discursivas e devem ser resolvidas, no caderno de prova, e na página onde estão enunciadas.
- 07.** Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.
- 08.** Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.
- 09.** Assinale as respostas de cada uma das 3(três) primeiras questões no corpo da prova e, só depois, transfira os resultados para a folha de respostas.
- 10.** Para marcar a folha de respostas, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul e faça as marcas de acordo com o modelo ● .
- 11.** A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.
- 12.** Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.
- 13.** Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.
- 14.** Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.
- 15.** Duração da prova: 4 horas.

NOME: _____

IDENTIDADE: _____ ÓRGÃO EXPEDIDOR: _____

ASSINATURA: _____

01. Sejam L , M e N os pontos médios dos lados AC , AB e BC do triângulo ABC respectivamente. Seja D ponto de contato do círculo de centro S , inscrito ao triângulo LMN , com o lado LM . P_1P_2 denota o comprimento do segmento com extremidades em P_1 e P_2 , e $[P_1P_2P_3]$ denota a área do triângulo $P_1P_2P_3$. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

A– (V) (F) A área do quadrilátero $LMNC$ mede metade da área do triângulo ABC .

B– (V) (F) Seja F o ponto de interseção da reta LS , com MN . Então $BC \cdot [LMF] = AB \cdot [LNF]$.

C– (V) (F) Suponha $AB=42$, $AC=34$ e $BC=20$. Então o raio do círculo inscrito no triângulo LMN é igual a 7.

D– (V) (F) O segmento MD mede metade de BN .

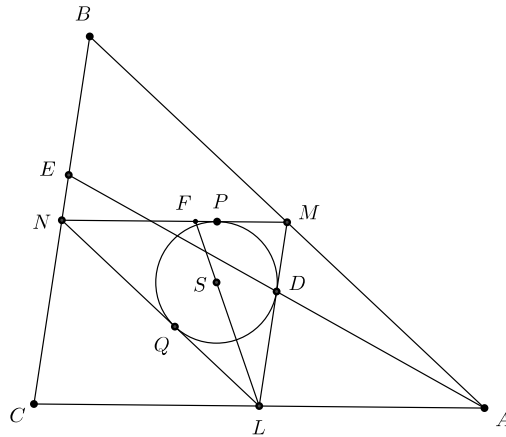
E– (V) (F) Se E é o ponto de encontro da reta AD com o lado BC do triângulo ABC , então $AB+BE = AC+CE$.

RESPOSTAS DA QUESTÃO 01: V F F F V.

RESOLUÇÃO:

Fatos que ajudam e notações:

- Os segmentos MN , NL e LM são bases médias de ABC associadas aos lados AC , AB e BC respectivamente. Portanto, medem metade dos lados correspondentes do triângulo ABC e são paralelos a eles.
- Segue-se das propriedades de base média que os triângulos AML , LMN , CLN e BNM são congruentes pelo critério LLL de congruência de triângulos.
- Os triângulos ABE e AMD são semelhantes pelo critério “ângulo-ângulo (AA)” de semelhança de triângulos.
- Façamos $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Seja $p = \frac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro de ABC . Assim, $ML = a/2$, $MN = b/2$, $LN = c/2$ e o semiperímetro de LMN é igual a $p/2$.



A- Verdadeira. A área do quadrilátero $LMNC$ corresponde a área de dois triângulos congruentes, enquanto a área do triângulo ABC equivale a área de quatro destes triângulos congruentes. Portanto, a área de $LMNC$ vale metade da área do triângulo ABC .

B- Falsa. Sendo S o incentro do triângulo LMN , temos que LF é bissetriz do ângulo $\angle NLM$. Segue-se do teorema da bissetriz interna que

$$\frac{FM}{FN} = \frac{LM}{LN} = \frac{BC/2}{AB/2} = \frac{BC}{AB}.$$

Pelo fato dos triângulos LMF e LNF possuírem mesma altura relativa aos lados MF e NF , respectivamente, tem-se:

$$\frac{[LMF]}{[LNF]} = \frac{FM}{FN} = \frac{BC}{AB} \iff AB \cdot [LMF] = BC \cdot [LNF].$$

C- Falsa. Das hipóteses, concluímos que $LN = 21$, $MN = 17$ e $LM = 10$. Desta forma o semiperímetro de LMN é $p = 24$. Calculamos a área do triângulo de duas formas:

$$[LMN] = \sqrt{24(24 - 10)(24 - 17)(24 - 21)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 84.$$

Por outro lado,

$$[LMN] = 24.r,$$

sendo r o raio do círculo em questão.

Daí,

$$r = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}.$$

D- Falsa. Note que isto ocorreria apenas no caso de D ser o ponto médio do segmento LM , pois os triângulos ABE e AMD são semelhantes e, caso afirmativo, os pontos E e N seriam coincidentes. Equivalentemente, a afirmação seria verdadeira apenas para ABC isósceles ($b = c$).

De modo geral, sejam P e Q os pontos de contato com o círculo com os lados MN e NL respectivamente. Então,

$$MD = MP = x, NP = NQ = y \text{ e } LQ = LD = z.$$

Implica que

$$2(x + y + z) = \frac{a + b + c}{2} \implies x = \frac{p}{2} - (y + z) \implies MD = \frac{p - c}{2} = \frac{a + b - c}{4}.$$

E- Verdadeira. Da semelhança dos triângulos ABE e AMD , temos que $BE = 2MD$.

Pelo item anterior, $2MD = \frac{a + b - c}{2} = BE$.

Daí,

$$2BE = BC + AC - AB \implies 2BE = (BE + CE) + AC - AB \implies BE + AB = CE + AC.$$

- 02.** Um certo jogo de RPG tornou-se muito popular, como o jogo usava dados octaédricos regulares (como o balão de são joão), várias indústrias começaram a produzir dados octaédricos. Se uma empresa decide construir apenas dados tais que os números das faces opostas somam 9, qual é o número de diferentes tipos de dados que podem ser construídos nestas condições?

RESPOSTA: 16.

RESOLUÇÃO:

Se queremos impor que as faces opostas somem 9 temos $8 \times 6 \times 4 \times 2 = 384$ maneiras de dispor os números. Cada configuração é contada 24 vezes, daí temos apenas 16 dados distintos.

- 03.** Um general deseja verificar o número de soldados em um de seus pelotões. Então, mandou que os soldados formassem alinhados de 9 em 9 e verificou que sobraram 2 soldados. Em seguida, ordenou que formassem alinhados de 11 em 11 e verificou que sobraram 4. Finalmente, fez os soldados se alinharem de 13 em 13 e sobraram 8. Sabendo que o pelotão têm entre dois mil e três mil soldados determine quantos soldados sobraram quando o general os mandou formar de 100 em 100.

RESPOSTA: 70.

RESOLUÇÃO:

Seja N o número de soldados. Os dados do problema nos dão que $N - 8$ é múltiplo de 13, $N - 4$ é múltiplo de 11 e $N - 2$ é múltiplo de 9.

$N - 8 = 13q$ com q inteiro. Como $N - 4$ é múltiplo de 11, temos que $N - 4 - 11q = 2q + 4 = 2(q + 2)$ também é múltiplo de 11. Desse modo, como 2 e 11 são coprimos, $q + 2$ é múltiplo de 11. Daí, $q + 2 = 11k$, com k inteiro. Logo,

$$N - 8 = 13(11k - 2) = 143k - 26.$$

Como $N - 2$ é múltiplo de 9,

$$(N - 2) - 144k = -k - 20$$

também é múltiplo de 9. Assim, temos que $k + 20 = 9l$ com $l \in \mathbb{Z}$. Consequentemente, $k = 9l - 20$ e daí,

$$N - 8 = 143(9l - 20) - 26$$

Isolando N na equação acima obtemos $N = 1287l - 2878$ com l inteiro.

Como $2000 < N < 3000$ temos que $l = 4$ e $N = 2270$. Logo, o pelotão tem 2270 soldados e a resposta procurada é 70.

04. a) Sabendo que a média aritmética de k números positivos $x_1, x_2, \dots, x_k$ é maior ou igual que a média geométrica desses números:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} \geq \sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k},$$

mostre que

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_k}{x_1} \geq k.$$

- b) A alometria é a parte da biologia que estuda a variação na forma entre espécies e indivíduos da mesma espécie. As funções que descrevem esses fenômenos são ditas alométricas e são da forma $f(x) = a \cdot x^b$, com $a, b > 0$. Considere a seguinte combinação de funções alométricas:

$$f : \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por $f(x) = (n+1)x^n - n \cdot x^{n+1}$, com $n \in \mathbb{N}$. Verificar que f é limitada inferiormente por 0 e limitada superiormente por 1, ou seja, $0 \leq f(x) \leq 1$.

RESOLUÇÃO:

- a) $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \dots, \frac{x_{k-1}}{x_k}, \frac{x_k}{x_1}$ são k números positivos, logo:

$$\frac{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_k}{x_1}}{k} \geq \sqrt[k]{\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \dots \cdot \frac{x_{k-1}}{x_k} \cdot \frac{x_k}{x_1}} = \sqrt[k]{\frac{x_1}{x_1}} = 1.$$

- b) Perceba que $f(x) = x^n [(n+1) - n \cdot x]$, logo $f(0) = 0$. E $f(x) \geq 0$, pois $0 \leq x \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$. Agora consideremos x no intervalo $(0, 1 + \frac{1}{n}]$. Tomemos então $x_1 = x^{n+1}$, $x_2 = x^n, \dots, x_{n-1} = x^3$, $x_n = x^2$, $x_{n+1} = x$ na desigualdade do item anterior:

$$\underbrace{\frac{x^{n+1}}{x^n} + \frac{x^n}{x^{n-1}} + \dots + \frac{x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x^{n+1}}}_{n\text{-parcelas}} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{x_1} \geq n+1 \therefore$$

$$n \cdot x + \frac{1}{x^n} = \underbrace{x + x + \dots + x + x}_{n\text{-parcelas}} + \frac{1}{x^n} \geq n+1 \therefore$$

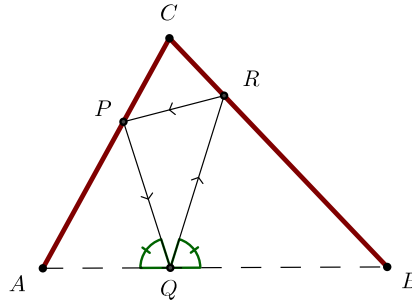
$$n \cdot x^{n+1} + 1 \geq (n+1)x^n \therefore$$

$$1 \geq (n+1)x^n - n \cdot x^{n+1} = f(x).$$

Critérios de correção:

- item a) – (10 pts) Usar a relação das médias corretamente;
 – (10 pts) Fazer as devidas simplificações e demonstrar o resultado;
- item b) – (10 pts) Verificar que $f(x) \geq 0$;
 – (10 pts) Escrever a sequencia conveniente para usar a fórmula de a);
 – (10 pts) Manipular a inequação corretamente;
 – (10 pts) Concluir corretamente;

- 05.** Um garoto se posiciona em um ponto Q localizado entre os pontos A e B (ver figura) e chuta uma bola que bate na parede representada por BC , seguindo até a parede AC e volta precisamente ao ponto Q de onde foi chutada (sem perder contato com o solo) de modo que $\angle AQP = \angle BQR$. Mostre que o ponto Q é pé da altura relativa ao lado AB no triângulo ABC .



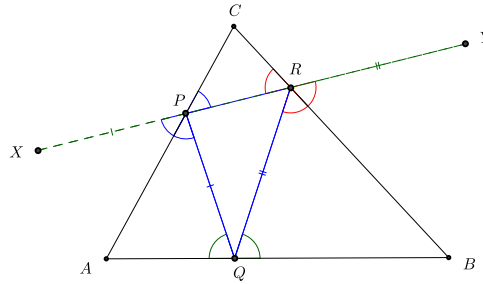
RESOLUÇÃO:

Primeiramente, observe que os ângulos obtidos pela trajetória da bola com as paredes satisfazem: $\angle CPR = \angle APQ$ e $\angle CRP = \angle BRQ$.

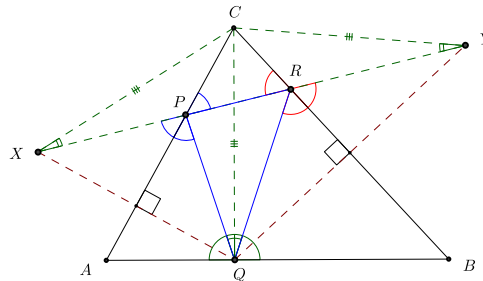
Sobre a reta PR considere os pontos X , Y tais que $XP = PQ$ e $YR = RQ$.

Temos que $\angle CPR = \angle APX$ (são opostos pelo vértice). Analogamente, $\angle CRP = \angle BRY$

Sabemos que num triângulo isósceles, a bissetriz relativa à base coincide com altura e mediana.



Logo, AC é mediatriz do segmento XQ e CB mediatriz de QY . Seque-se que $CX = CQ = CY$. Daí, CXY é isósceles. Sendo assim, $\angle CXY = \angle CYX$. Visto que CQY e RQY são também isósceles, obtém-se $\angle CYX =$



$\angle CQR$. Analogamente, $\angle CXP = \angle PQC$.

Ora, os ângulos $\angle AQC$ e $\angle CQB$ são congruentes e suplementares. Portanto, cada um mede 90° e concluímos que CQ é a altura relativa ao lado AB .

Critérios de correção:

- (10 pts) Identificar que os ângulos “de incidência e refletidos na parede” são congruentes. Ou seja,

$$\angle CPR = \angle APQ \text{ e } \angle CRP = \angle BRQ;$$

- (15 pts) Realizar o prolongamento de PQ conforme a solução ou fazer as reflexões dos segmentos PQ e RQ em relação aos lados AC e BC respectivamente, e concluir que os segmentos refletidos e PR são colineares;
- (15 pontos) Usar adequadamente as propriedades de triângulos isósceles, mediatriz ou congruência de triângulos e concluir que $\angle PXQ = \angle PQX$ e $\angle RQY = \angle RYQ$;
- (10 pontos) Perceber que $XC = CQ = CY$.

06. Em algumas cidades do interior de Pernambuco costumava-se jogar, usando feijões, o seguinte jogo para dois jogadores: Dispunha-se sobre a mesa uma quantidade qualquer de feijões, digamos n feijões. Cada jogador tem que retirar um certo número de feijões que pode variar desde um feijão até uma quantidade que não seja maior que a número de feijões que ainda restarem na mesa após a jogada. Por exemplo, se restam 5 feijões sobre a mesa o próximo jogador a retirar pode retirar 1 ou 2 feijões. Perde o jogador que retirar o último feijão. Para quais valores de n o primeiro jogador pode encontrar uma estratégia vencedora? E o segundo jogador?

RESOLUÇÃO:

Vamos verificar o que ocorre com poucos feijões. Chamamos o primeiro jogador de A e o segundo de B.

- 1 feijão: A perde
- 2 feijões: A retira 1 e faz B perder. A ganha.
- 3 feijões: A é obrigado a tirar 1 agora B esta na posição de A num jogo com 2 feijões. B ganha.
- 4 feijões: A pode tirar 1 feijão e colocar B na posição de A num jogo com 3 feijões. A ganha.
- 5 feijões: A pode tirar 2 feijões e colocar B na posição de A num jogo com 3 feijões. A ganha.
- 6 feijões: A pode tirar 3 feijões e colocar B na posição de A num jogo com 3 feijões. A ganha.
- 7 feijões: A so pode tirar 1, 2, ou 3 feijões, nesse caso ele coloca B na condição de A num jogo com 6,5 ou 4 feijões. B ganha.
- de 8 a 14 feijões: A pode tirar de 1 a 7 feijões de modo a colocar B na condição de A num jogo com 7 feijões: A ganha.
- 15 feijões: A so pode tirar de 1 a 7 feijões deixando B na condição de A num jogo de 8 a 14 feijões. B ganha.
- de 16 a 30 feijões: A deixa B com 15. A ganha.
- 31 feijões: Apos jogar A deixa B com uma quantidade entre 16 e 30 feijões. B Ganha.

Em geral...

- de 2^k ate $2^{(k+1)} - 2$ feijões: A ganha
- $2^{(k+1)} - 1$ feijões: B ganha

Prova por indução: A base ja foi bem explicada. Supondo o resultado verdadeiro para um certo $k > 1$ vamos ver o que acontece para $k+1$.

- de $2^{(k+1)}$ ate $2^{(k+2)} - 2$ feijões: A retira de 1 ate $2^{(k+1)} - 1$ de modo a deixar B com $2^{(k+1)} - 1$ feijões. Assim, B assume a posição de A num jogo com $2^{(k+1)} - 1$ e perde, ou seja A ganha.
- $2^{(k+1)} - 1$ feijões: A só pode tirar de 1 ate $2^k - 1$ feijões. Nesse caso B fica com uma quantidade de feijões que varia de 2^k ate $2^{(k+1)} - 1$ feijões assumindo o lugar de A num jogo com essa quantidade de feijões B ganha.

Critérios de correção:

- (5 pts) Obter a estratégia vencedora para os jogos com 1 e 2 e 3;
- (5 pts) Obter a estratégia vencedora para o jogo com 3 feijões;
- (5 pts) Obter a estratégia vencedora para os jogos com 4 5 e 6 feijões;
- (5 pts) Obter a estratégia vencedora para o jogo com 7 feijões;
- (20 pts) Perceber o padrão geral;
- (20 pts) Provar o padrão geral da estratégia vencedora por indução.