Olimpíada Pernambucana de Matemática 2022

Segunda Fase - Nível 3 (Ensino Médio)

CADERNO DE QUESTÕES

OPEMAT

REALIZAÇÃO:

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO — DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

APOIO:

Associação Olimpíada Brasileira de Matemática — stone

LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

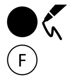
01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. A prova é composta de 5 questões: 1 questão do tipo Verdadeiro ou Falso e 4 questões dissertativas. Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos.

04. A resposta da questão do tipo Verdadeiro ou Falso só será considerada mediante a marcação no gabarito e justificativa.

05. Para marcar a resposta, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul com o modelo:



06. A marcação da folha de identificação é definitiva, não admitindo rasuras.

07. Marcações duplas, em branco ou diferentes do exemplo acima serão desconsideradas.

08. Além de marcar a alternativa, você deve também justificar a resposta na folha destinada.

09. As 4(quatro) questões discursivas devem ser resolvidas, no Caderno de Questões, e na página onde estão enunciadas.

10. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

11. Ao receber a folha de identificação, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

12. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de identificação, pois isso poderá prejudicá-lo.

12. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

13. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de entregá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.

14. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

15. Duração da prova: 4 horas.

Nome: ____

Identidade: ____________________ Órgão Expedidor: ____________________

Assinatura: ____

Q1. Considere o círculo C_a com centro na origem $O = (0,0)$ e raio a. Seja $A = (a,0)$ o ponto de interseção do círculo C_a com o eixo x. Considere agora, o círculo C_b, com centro C na reta OA e raio b, tangente à C_a em A, com $b < a$. O círculo C_b rola sob o círculo C_a no sentido anti-horário sem deslizar, de forma que a semirreta OC, após o rolamento, forma um ângulo θ com o eixo x, com $\theta < 2\frac{b}{a}\pi$ e T o ponto de interseção da semirreta OC com a circunferência C_a,

Após o rolamento de C_b sob C_a por um ângulo θ, o ponto A é deslocado para o ponto $P = (x(\theta), y(\theta))$, conforme a figura abaixo:

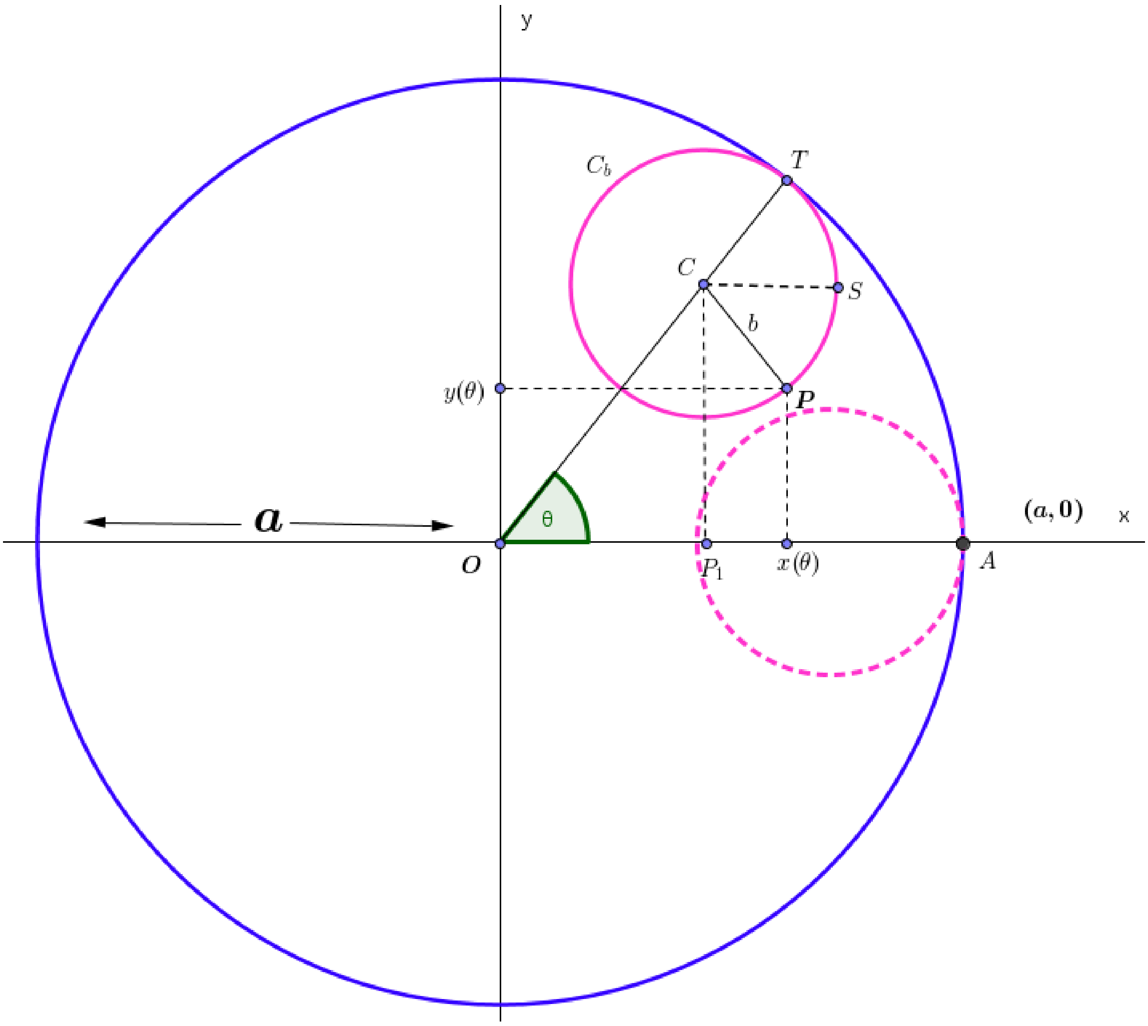


Figura 1: Representação do rolamento

Julgue os itens a seguir atribuindo (V) se a afirmação for VERDADEIRA ou (F) se a afirmação for FALSA.

(A) (V) (F) Se P_1 é a projeção do ponto C no eixo x, então $OP_1 = (a-b)\cos(\theta)$ e $CP_1 = (a-b)\sin(\theta)$.

(B) (V) (F) Se $\alpha = T\hat{C}P$, então $2\alpha b = a\theta$.

(C) (V) (F) Seja S um ponto de C_b à direita de C após o rolamento tal que o segmento CS é paralelo ao eixo x e P_2 o ponto de interseção entre a reta paralela a CS que passa por P e o segmento CP_1. Se φ é o ângulo $S\hat{C}P$, então $P_2P = b\sin(\varphi)$ e $CP_2 = b\cos(\varphi)$.

(D) (V) (F) O ângulo φ é dado por $\varphi = \alpha - \theta = \dfrac{(a-b)\theta}{b}$.

(E) (V) (F) As coordenadas $x(\theta)$ e $y(\theta)$ do ponto P são dadas por $x(\theta) = (a-b)\cos\theta + b\cos\left(\dfrac{(a-b)\theta}{b}\right)$ e $y(\theta) = (a-b)\sin(\theta) - b\sin\left(\dfrac{(a-b)\theta}{b}\right)$.

ESPAÇO RESERVADO PARA RASCUNHO

QUADRO DE RESPOSTAS
(A resposta dessa questão só será considerada mediante a marcação no gabarito e justificativa!)

Q1	A	B	C	D	E
V	Ⓥ	Ⓥ	Ⓥ	Ⓥ	Ⓥ
F	Ⓕ	Ⓕ	Ⓕ	Ⓕ	Ⓕ

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 01:

ESPAÇO RESERVADO PARA RASCUNHO

CONTINUAÇÃO DA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 01:

ESPAÇO RESERVADO PARA RASCUNHO

Q2. No intervalo entre as aulas de geometria e teoria dos números da "Escola Olímpica de Matemática", Francisco pediu a professora Maité a senha de acesso ao laboratório de computação para jogar "League of Legends" com seus amigos. A professora Maité disse a Francisco que só daria a senha de acesso ao laboratório se ele determinasse a solução da equação:

$$2^{(x-1)} + 3^{x} = 27^{x}.2^{(-2x-1)}.$$

Sabendo que Francisco e seus amigos conseguiram jogar "League of Legends" no laboratório, qual foi a solução encontrada por ele?

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 02:

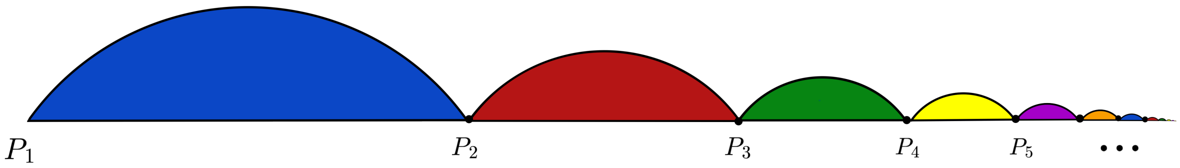
Q3. Considere a seguinte expressão algébrica

$$\sqrt{1000 + \sqrt[10]{n}} + \sqrt{1000 - \sqrt[10]{n}}.$$

Determine a quantidade de números inteiros $n \geq 1$ que torna a expressão acima um número inteiro.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 03:

Q4. No "Multiverso" do Pi-raia e da Pi-veta, existe uma estrutura plana articulável composta por infinitos segmentos circulares associados às cordas P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4,... conforme a figura a seguir:

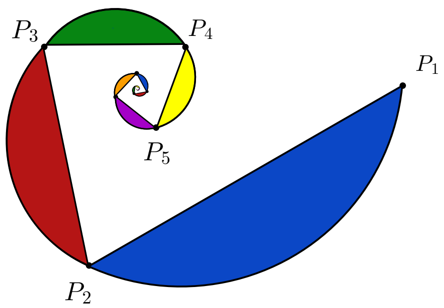


Deseja-se calcular a área total dessa estrutura, quando apenas a área do segmento circular maior é conhecida. Nossa dupla resolveu esse problema quando descobriu que existe uma configuração para essa estrutura (ver figura abaixo) de um modo que, para cada $n \geq 1$:

(i) Os triângulos $P_nP_{n+1}P_{n+2}$ são semelhantes (com esta ordem dos vértices);

(ii) O ponto P_{n+3} está a uma mesma distância dos segmentos P_nP_{n+1} e $P_{n+1}P_{n+2}$;

(iii) O arco de círculo P_nP_{n+1} possui centro em P_{n+3}.



Sendo assim, determine a soma total das áreas dessa estrutura, sabendo que a área do maior segmento circular vale $5 - \sqrt{5}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 04:

ESPAÇO RESERVADO PARA RASCUNHO

CONTINUAÇÃO DA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 04:

CONTINUAÇÃO DA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 04:

ESPAÇO RESERVADO PARA RASCUNHO

Q5. O Pi-raia possui em seu quarto uma caixa contendo 3 medalhas de ouro, 3 de prata e 3 de bronze, sendo que medalhas de um mesmo material são indistinguíveis. De quantos modos o Pi-raia pode dispô-las em fila sobre uma prateleira se ele não deseja que medalhas de um mesmo material fiquem juntas?

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 05:

ESPAÇO RESERVADO PARA RASCUNHO

CONTINUAÇÃO DA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 05:

CONTINUAÇÃO DA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 05:

ESPAÇO RESERVADO PARA RASCUNHO