



Olimpíada Pernambucana de Matemática 2022
Segunda Fase - Nível 3 (Ensino Médio)

OPEMAT CADERNO DE QUESTÕES E SOLUÇÕES

REALIZAÇÃO:



APOIO:



LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.
02. Preencha os dados pessoais.
03. A prova é composta de 5 questões: 1 questão do tipo Verdadeiro ou Falso e 4 questões dissertativas. Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos.
04. A resposta da questão do tipo Verdadeiro ou Falso só será considerada mediante a marcação no gabarito e justificativa.
05. Para marcar a resposta, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul com o modelo:

06. A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.
07. Marcações duplas, em branco ou diferentes do exemplo acima serão desconsideradas.
08. **Além de marcar a alternativa, você deve também justificar a resposta na folha destinada.**
09. As 4(quatro) questões discursivas devem ser resolvidas, no Caderno de Questões, e na página onde estão enunciadas.
10. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.
11. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.
12. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.
12. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.
13. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.
14. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.
15. Duração da prova: 4 horas.

NOME: _____

IDENTIDADE: _____ ÓRGÃO EXPEDIDOR: _____

ASSINATURA: _____

Q1. Considere o círculo C_a com centro na origem $O = (0,0)$ e raio a . Seja $A = (a,0)$ o ponto de interseção do círculo C_a com o eixo x . Considere agora, o círculo C_b , com centro C na reta OA e raio b , tangente à C_a em A , com $b < a$. O círculo C_b rola sob o círculo C_a no sentido anti-horário sem deslizar, de forma que a semirreta OC , após o rolamento, forma um ângulo θ com o eixo x , com $\theta < 2\frac{b}{a}\pi$ e T o ponto de interseção da semirreta OC com a circunferência C_a ,

Após o rolamento de C_b sob C_a por um ângulo θ , o ponto A é deslocado para o ponto $P = (x(\theta), y(\theta))$, conforme a figura abaixo:

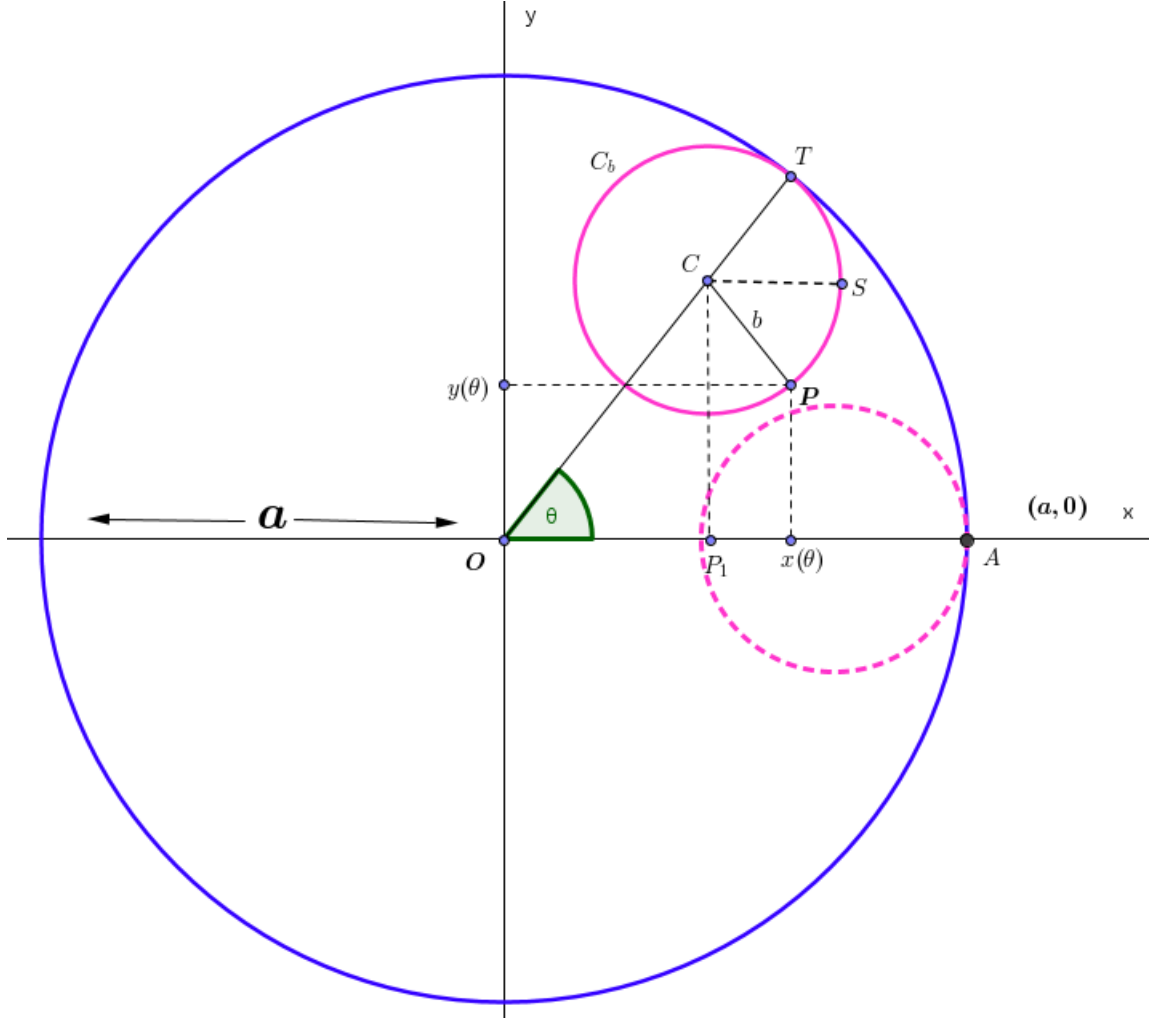


Figure 1: Representação do rolamento

Julgue os itens a seguir atribuindo (V) se a afirmação for VERDADEIRA ou (F) se a afirmação for FALSA.

- (A) (V) (F) Se P_1 é a projeção do ponto C no eixo x , então $OP_1 = (a - b) \cos(\theta)$ e $CP_1 = (a - b) \sin(\theta)$.
- (B) (V) (F) Se $\alpha = \angle T\hat{C}P$, então $2ab = a\theta$.
- (C) (V) (F) Seja S um ponto de C_b à direita de C após o rolamento tal que o segmento CS é paralelo ao eixo x e P_2 o ponto de interseção entre a reta paralela a CS que passa por P e o segmento CP_1 . Se φ é o ângulo $\angle S\hat{C}P$, então $P_2P = b \sin(\varphi)$ e $CP_2 = b \cos(\varphi)$.
- (D) (V) (F) O ângulo φ é dado por $\varphi = \alpha - \theta = \frac{(a - b)\theta}{b}$.
- (E) (V) (F) As coordenadas $x(\theta)$ e $y(\theta)$ do ponto P são dadas por $x(\theta) = (a - b) \cos \theta + b \cos \left(\frac{(a - b)\theta}{b} \right)$ e $y(\theta) = (a - b) \sin(\theta) - b \sin \left(\frac{(a - b)\theta}{b} \right)$.

SOLUÇÃO: (A) Verdadeiro.

Considere o triângulo $\triangle OCP_1$, onde P_1 é a projeção do ponto C no eixo x então,

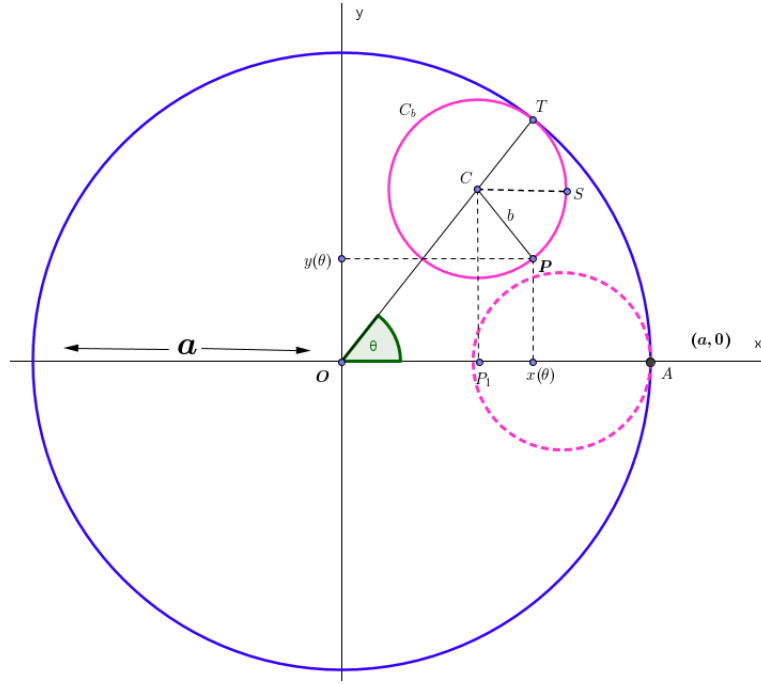


Figure 2: Representação do rolamento

$$\cos\theta = \frac{OP_1}{OC} = \frac{OP_1}{(a-b)} \implies OP_1 = (a-b)\cos(\theta)$$

$$\sin\theta = \frac{CP_1}{OC} = \frac{CP_1}{(a-b)} \implies CP_1 = (a-b)\sin(\theta).$$

(B) Falso.

Observe que $b\alpha = \text{Arco}(TP) = \text{Arco}(AT) = a\theta$. Assim, $b\alpha = a\theta$ (Figura 2). Logo, $\alpha b = a\theta$.

(C) Falso.

Observando o triângulo $\triangle PP_2C$ concluímos que $PP_2 = b\cos(\varphi)$ e $CP_2 = b\sin(\varphi)$ pois,

$$\cos(\varphi) = \frac{P_2P}{CP} \implies P_2P = \cos(\varphi)CP = b\cos(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{CP_2}{CP} \implies CP_2 = \sin(\varphi)CP = b\sin(\varphi)$$

(D) Verdadeiro.

Sendo S um ponto de C_b após o rolamento tal que o segmento CS é paralelo ao eixo x , olhando para os triângulos $\triangle P_2PC$ e $\triangle SCP$, note que φ_1 e φ_2 são alternos internos, logo $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Assim, $\varphi = \alpha - \theta = \frac{(a\theta)}{b} - \theta = \frac{(a-b)\theta}{b}$.

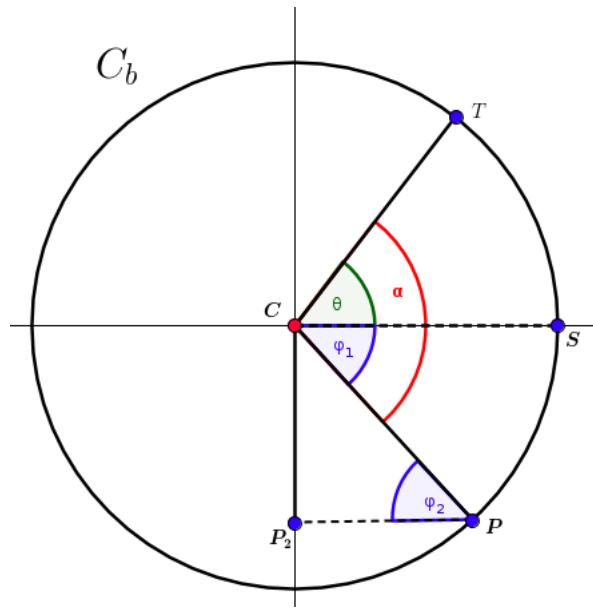


Figure 3: Círculo C_b

(E) Verdadeiro.

Pela figura observamos que $x(\theta) = OP_1 + PP_2$ e $y(\theta) = CP_1 - CP_2$. Pelo que vimos nos itens anteriores segue que as coordenadas $x(\theta)$ e $y(\theta)$ de P são dadas por

$$x(\theta) = (a - b)\cos(\theta) + b\cos(\varphi) = (a - b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{(a - b)\theta}{b}\right),$$

$$y(\theta) = (a - b)\sin\theta - b\sin(\varphi) = (a - b)\sin(\theta) - b\sin\left(\frac{(a - b)\theta}{b}\right).$$

Q2. No intervalo entre as aulas de geometria e teoria dos números da “Escola Olímpica de Matemática”, Francisco pediu a professora Maité a senha de acesso ao laboratório de computação para jogar “League of Legends” com seus amigos. A professora Maité disse a Francisco que só daria a senha de acesso ao laboratório se ele determinasse a solução da equação:

$$2^{(x-1)} + 3^x = 27^x \cdot 2^{(-2x-1)}.$$

Sabendo que Francisco e seus amigos conseguiram jogar “League of Legends” no laboratório, qual foi a solução encontrada por ele?

SOLUÇÃO:

Observe que

$$\begin{aligned}2^{(x-1)} + 3^x &= 27^x \cdot 2^{(-2x-1)} \\ &= \frac{27^x}{2^{2x+1}},\end{aligned}$$

multiplicando por 2 em ambos os membros, obtemos

$$2^x + 2(3^x) = \frac{27^x}{4^x}.$$

Agora dividindo ambos os lados da equação por 2^x , obtemos

$$\begin{aligned}1 + 2\frac{(3^x)}{2^x} &= \frac{27^x}{8^x} \\ \Rightarrow 1 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^x &= \left(\frac{27}{8}\right)^x \\ \Rightarrow 1 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^x &= \left(\frac{3}{2}\right)^{3x}.\end{aligned}$$

Fazendo agora $\varphi = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, substituindo na equação acima obtemos

$$1 + 2\varphi = \varphi^3 \Rightarrow \varphi^3 - 2\varphi - 1 = 0. \quad (1)$$

Fatorando o polinômio à esquerda da igualdade, obtemos

$$\varphi^3 - 2\varphi - 1 = (\varphi^2 - \varphi - 1)(\varphi + 1).$$

Logo as soluções da equação (1) são $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\varphi = -1$. Como $\varphi = \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$, então a única solução possível é $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que é o número de ouro. Assim, temos

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \quad (2)$$

Tomando o logaritmo na base e em ambos os lados da equação (2), obtemos que a senha encontrada é

$$x = \frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}. \quad (3)$$

Q3. Considere a seguinte expressão algébrica

$$\sqrt{1000 + \sqrt[10]{n}} + \sqrt{1000 - \sqrt[10]{n}}.$$

Determine a quantidade de números inteiros $n \geq 1$ que torna a expressão acima um número inteiro.

SOLUÇÃO: No que segue, chamaremos a expressão acima de um certo número inteiro $K > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\sqrt{1000 + \sqrt[10]{n}} + \sqrt{1000 - \sqrt[10]{n}} &= K \\ \Rightarrow 1000 + \sqrt[10]{n} + 1000 - \sqrt[10]{n} + 2\sqrt{1000.000 - \sqrt[5]{n}} &= K^2 \\ \Rightarrow 4000 > 2000 + 2\sqrt{1000.000 - \sqrt[5]{n}} &= K^2 \\ \Rightarrow 2\sqrt{1000.000 - \sqrt[5]{n}} &= K^2 - 2000 \geq 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$n = \left[1000.000 - \left(\frac{K^2 - 2000}{2} \right)^2 \right]^5$$

e

$$2000 \leq K^2 < 4000 \Rightarrow 45 \leq K < 63.$$

Como n é um número inteiro então K^2 é um número par, consequentemente, K é um número par. Desde que

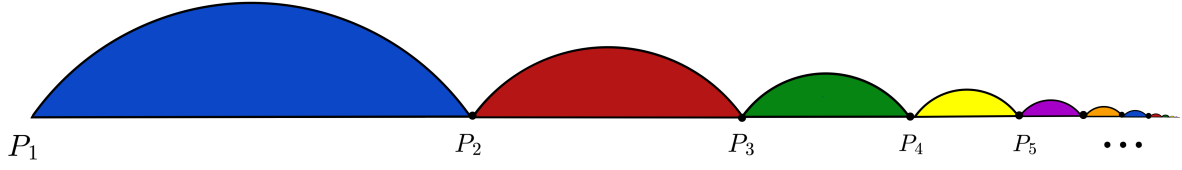
$$46 \leq K \leq 62$$

então

$$K \in \{46, 48, 50, \dots, 60, 62\},$$

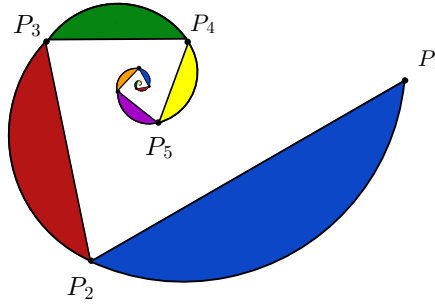
isto é, para cada K inteiro e par, teremos um único inteiro n , o que mostra que a resposta desejada é 9.

Q4. No “Multiverso” do Pirraia e da Piveta, existe uma estrutura plana articulada composta por infinitos segmentos circulares associados às cordas P_1P_2 , P_2P_3 , $P_3P_4, \dots$ conforme a figura a seguir.



Deseja-se calcular a área total dessa estrutura, mas apenas a área do segmento circular maior é conhecida. Nossa dupla resolveu esse problema quando descobriu que existe uma configuração para essa estrutura (ver figura abaixo) de um modo que, para cada $n \geq 1$:

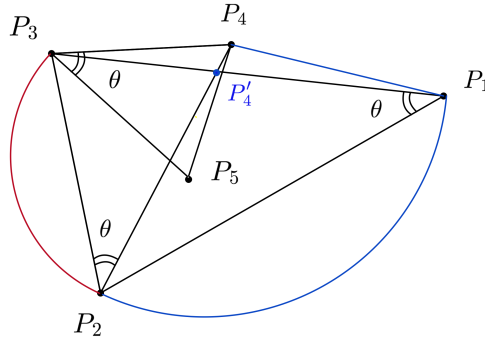
- (i) os triângulos $P_nP_{n+1}P_{n+2}$ são semelhantes (com esta ordem dos vértices);
- (ii) o ponto P_{n+3} está a uma mesma distância dos segmentos P_nP_{n+1} e $P_{n+1}P_{n+2}$;
- (iii) o arco de círculo P_nP_{n+1} possui centro em P_{n+3} .



Sendo assim, determine a soma total das áreas dessa estrutura, sabendo que a área do maior segmento circular vale $5 - \sqrt{5}$.

SOLUÇÃO: Primeiramente, note que os pontos P_n , P_{n+2} e P_{n+3} são colineares, para todo $n \geq 1$.

De fato, para simplificar a notação, vamos verificar isto apenas para os pontos P_1 , P_3 e P_4 , pois o argumento é o mesmo para o caso geral.

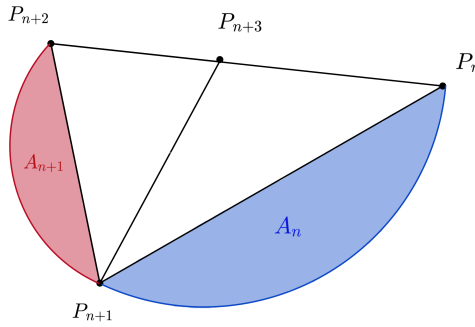


Façamos $P_3\hat{P}_1P_2 = \theta$. Por (i), temos que $P_4\hat{P}_2P_3 = \theta$. A condição (ii) implica que P_4 pertence a bissetriz do ângulo $P_1\hat{P}_2P_3$, logo $P_1\hat{P}_2P_4 = \theta$.

Por fim, a hipótese (iii) assegura que o triângulo $P_1P_2P_4$ é isósceles. Daí, $P_4\hat{P}_1P_2 = P_1\hat{P}_2P_4 = \theta = P_3\hat{P}_1P_2$, donde P_1 , P_3 e P_4 estão alinhados.

Aplicando o mesmo raciocínio para os demais triângulos é possível concluir que, para todo $n \geq 1$, os triângulos $P_nP_{n+1}P_{n+2}$ são isósceles e tais que $P_nP_{n+3} = P_{n+3}P_{n+1} = P_{n+1}P_{n+2}$. Em particular,

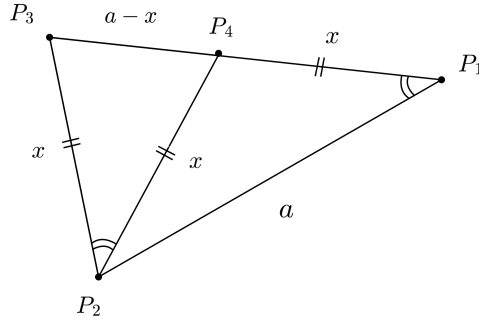
$$P_1P_4 = P_4P_2 = P_2P_3.$$



Note que os triângulos $P_nP_{n+1}P_{n+3}$ também são semelhantes para cada $n \geq 1$. Logo, os segmentos circulares são semelhantes e, portanto, a sequência das áreas $A_1, A_2, \dots$ forma uma progressão geométrica P.G. ($A_1, A_2, A_3, \dots$)

cujas razão $q = \frac{A_{n+1}}{A_n}$ entre duas áreas consecutivas é dada pelo quadrado da razão de semelhança. A razão de

semelhança pode ser calculada por $\frac{P_2P_3}{P_1P_2}$.



Dada a semelhança $P_1P_2P_3 \sim P_2P_3P_4$ e considerando $P_1P_2 = a$ e $P_2P_3 = x$, segue-se que

$$0 < \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

Daí, $\frac{P_2P_3}{P_1P_2} = \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Logo, a razão q entre as áreas é $q = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Desta forma, a soma das infinitas áreas que compõem a estrutura é dada por

$$S = \frac{A_1}{1-q} = \frac{5-\sqrt{5}}{1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2(5-\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(5-\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2 \cdot 4\sqrt{5}}{4} = 2\sqrt{5}$$

Q5. O Pi-raia possui em seu quarto uma caixa contendo 3 medalhas de ouro, 3 de prata e 3 de bronze, sendo que medalhas de um mesmo material são indistinguíveis. De quantos modos o Pi-raia pode dispô-las em fila sobre uma prateleira se ele não deseja que medalhas de um mesmo material fiquem juntas?

SOLUÇÃO: Representando por "O", "P" e "B" os três materiais (ouro, prata e bronze), podemos identificar uma disposição das medalhas sobre a prateleira com um anagrama da palavra OOOPPPBBB. Denotemos por

$$\Omega = \{\text{anagramas de OOOPPPBBB}\}$$

e sejam

$$X = \{\text{anagramas de OOOPPPBBB nos quais ocorre o bloco OO}\}$$

$$Y = \{\text{anagramas de OOOPPPBBB nos quais ocorre o bloco PP}\}$$

$$Z = \{\text{anagramas de OOOPPPBBB nos quais ocorre o bloco BB}\}$$

O problema consiste, portanto, em contar os elementos de

$$|\Omega| - |X \cup Y \cup Z|.$$

Temos

$$|\Omega| = \frac{9!}{3!3!3!} = 1.680.$$

Por outro lado, o princípio da inclusão e exclusão afirma que

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.$$

Para contar os anagramas de X , basta supor que duas letras OO formam um único bloco OO. Assim, teremos 7 letras e o bloco OO para permutar, o que pode ser feito de

$$\frac{8!}{3!3!} = 1.120 \text{ modos}$$

Entretanto, ao contar estes anagramas, contamos os anagramas que possuem o bloco OOO duas vezes. Com efeito, estes foram contados uma vez quando contamos os anagramas que possuíam uma letra O seguida do bloco OO e outra vez quando contamos os anagramas que possuíam o bloco OO seguido do bloco O. O número de anagramas que contêm o bloco OOO é

$$\frac{7!}{3!3!} = 140.$$

Logo, $|X| = 1.120 - 140 = 980$. Por um raciocínio análogo, conclui-se que $|Y| = |Z| = 980$.

Os anagramas de $X \cap Y$ contêm um bloco OO, um bloco PP e 5 letras, logo temos

$$\frac{7!}{3!} = 840$$

anagramas ao todo. Aqui, porém, foram contados duas vezes os anagramas que contêm um bloco OOO e um bloco PP e duas vezes os anagramas que contêm um bloco OO e um bloco PPP. Os anagramas que contêm um bloco OOO e um bloco PP são em número

$$\frac{6!}{3!} = 120,$$

e o mesmo ocorre para os anagramas que contêm um bloco OO e um bloco PPP. Descontando do valor obtido originalmente, ficamos com $840 - 2 \cdot 120 = 600$ anagramas. Porém, neste processo, os anagramas que contêm os blocos OOO e PPP, que são em número

$$\frac{5!}{3!} = 20,$$

foram contados quatro vezes e, em seguida, descontados quatro vezes. Logo, como não foram contados nenhuma vez, devemos contá-los uma única vez. Assim, o total de elementos de $X \cap Y$ é 620. Por simetria, $|X \cap Z| = |Y \cap Z| = 620$.

Por fim, para contar os elementos de $X \cap Y \cap Z$, contamos os anagramas que contém os blocos OO, PP e BB e as letras O, P e B, o que nos dá $6! = 720$ anagramas. Nestes, contamos duas vezes os anagramas que contém OOO, PP e BB, duas vezes os anagramas que contém OO, PPP e BB e duas vezes os anagramas que contém OO, PP e BBB. Como cada um destes ocorre em número $5! = 120$, temos que o novo sub-total é $720 - 3 \cdot 120 = 360$. Fazendo isso, os anagramas que contém OOO, PPP e BB foram descontados quatro vezes, quando haviam sido contados 4 vezes, originalmente. O mesmo vale para os anagramas que contém OOO, PP e BBB e OO, PPP e BBB. Como cada caso destes contém $4! = 24$ anagramas, incluímos estes na nossa contagem, obtendo assim o subtotal $= 360 + 3 \cdot 24 = 432$.

Finalmente, os anagramas que contém os blocos OOO, PPP e BBB, que são em número $3! = 6$ foram contados 8 vezes inicialmente, descontados 12 vezes e contados novamente 6 vezes, de modo que estes anagramas foram contados 2 vezes. Assim, o número de elementos de $X \cap Y \cap Z$ é, de fato, $432 - 6 = 426$.

Portanto, a resposta final é

$$\begin{aligned} |X \cup Y \cup Z| &= |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z| \\ &= 1.680 - (3 \cdot 980 - 3 \cdot 620 + 426) \\ &= 174. \end{aligned}$$