OPEMAT

Olimpíada Pernambucana de Matemática 2022

Segunda Fase - Nível 1 (6º e 7º anos)

CADERNO DE QUESTÕES E SOLUÇÕES

REALIZAÇÃO:
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
APOIO:
Associação Olimpíada Brasileira de Matemática
stone

LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!

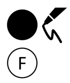
01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. A prova é composta de 5 questões: 1 questão do tipo Verdadeiro ou Falso e 4 questões dissertativas. Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos.

04. A resposta da questão do tipo Verdadeiro ou Falso só será considerada mediante a marcação no gabarito e justificativa.

05. Para marcar a resposta, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul com o modelo:



06. A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.

07. Marcações duplas, em branco ou diferentes do exemplo acima serão desconsideradas.

08. Além de marcar a alternativa, você deve também justificar a resposta na folha destinada.

09. As 4(quatro) questões discursivas devem ser resolvidas, no Caderno de Questões, e na página onde estão enunciadas.

10. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

11. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

12. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.

12. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

13. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas.

14. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

15. Duração da prova: 4 horas.

NOME: ______________________________

IDENTIDADE: ______________ ÓRGÃO EXPEDIDOR: ______________

ASSINATURA: ______________________________

Q1. Diego está fazendo pulseiras para vender. Ele usa dezoito(18) bolinhas para cada pulseira, um(1) fecho e dois(2) pingentes: um do Pi-raia e outra da Pi-veta. Ele tem apenas duas cores de bolinhas disponíveis: preto e cinza Na hora de montar uma pulseira, ele sempre segue as seguintes regras:

Regra 1: Primeiro deve ser colocada a primeira parte do fecho, depois o pingente do Pi-raia, depois uma sequência de dezoito(18) bolinhas, depois o pingente da Pi-veta e por fim a outra parte do fecho;

Regra 2: A pulseira deve conter bolinhas de ambas as cores: preto e cinza;

Regra 3: Fixa-se uma sequência de cores de bolinhas e repete-se esta sequência de modo a atingir as dezoito(18) bolinhas;

Regra 4: As repetições da sequência de bolinhas fixada deverão ser sempre completas.

Uma pulseira que satisfaça as quatro regras acima é dita uma **pulseira elegante**.

Assim, por exemplo, a sequência de bolinhas (preto, preto, cinza) produz uma pulseira elegante (Figura 1). Já a sequência (preto, preto, cinza, cinza) não produz (Figura 2).

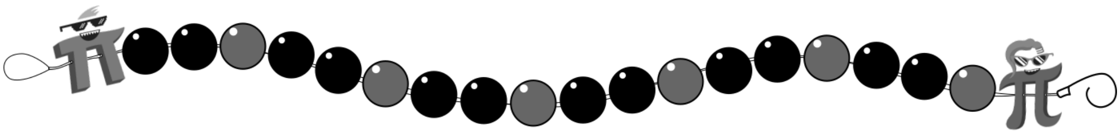


Figure 1: Pulseira elegante

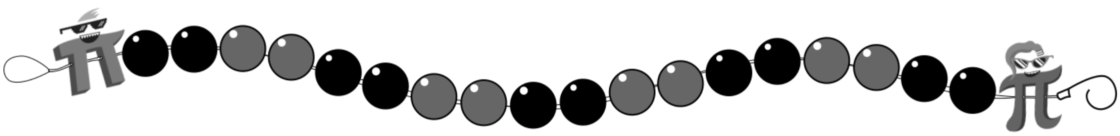


Figure 2: Pulseira não elegante

Julgue os itens a seguir atribuindo (V) se a afirmação for VERDADEIRA ou (F) se a afirmação for FALSA.

(A) (V) (F) A sequência de bolinhas (preto, cinza) produz uma pulseira elegante.

(B) (V) (F) Sequências com cinco(5) bolinhas produzem pulseiras elegantes.

(C) (V) (F) Diego só consegue fazer pulseiras elegantes com sequências de cores se repetindo a cada três(3) bolinhas ou nove(9) bolinhas.

(D) (V) (F) Diego consegue fazer seis(6) pulseiras elegantes distintas usando sequência de cores se repetindo a cada três(3) bolinhas.

(E) (V) (F) O total de pulseiras elegantes distintas que Diego produz é 572.

QUADRO DE RESPOSTAS
(A resposta dessa questão só será considerada mediante a marcação no gabarito e justificativa!)

Q1	A	B	C	D	E
V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F

SOLUÇÃO:

(A) A afirmação é VERDADEIRA, pois sendo P a bolinha preta e C a bolinha cinza, a pulseira PC PC PC PC PC PC PC PC PC satisfaz as regras seguidas por Diego.

(B) A afirmação é FALSA, pois se Diego escolher sequências com 5 bolinhas, como 18 não é divisível por 5, na última repetição da sequência, só será possível adicionar 3 bolinhas, o que contradiz a Regra 4.

(C) A afirmação é FALSA, pois para que a Regra 4 seja verdade, a sequência de cores deve ser escolhida de modo que o número de repetições dela seja divisível por 18. Desta forma, é possível produzir pulseiras elegantes repetindo sequências com 2, 3, 6 e 9. Aqui o número não pode ser 1 ou 18, pois a pulseira deve conter bolinhas de ambas as cores.

(D) A afirmação é VERDADEIRA, pois escolhendo uma sequência com 3 bolinhas, para cada bolinhas, temos duas opções de cores a ser escolhida, logo, temos $2^3 = 8$ possibilidades, porém pela Regra 2, devemos tirar as 2 pulseiras que tem apenas uma cor. Portanto, temos 6 pulseiras elegantes distintas que são as geradas pelas sequências: PCC, CPC, CCP, PPC, CPP, PCP.

(E) A afirmação é FALSA. observe que, como temos apenas duas cores para combinar, teremos apenas sequências de tamanho 2, 3, 6 ou 9 como possibilidades para que a pulseira tenha 18 bolinhas e a sequência de bolinhas seja completa.

Para sequências com duas bolinhas, teremos $2^2 - 2 = 2$ possibilidades, sendo que as duas excluídas serão as pulseiras com todas as bolinhas da mesma cor.

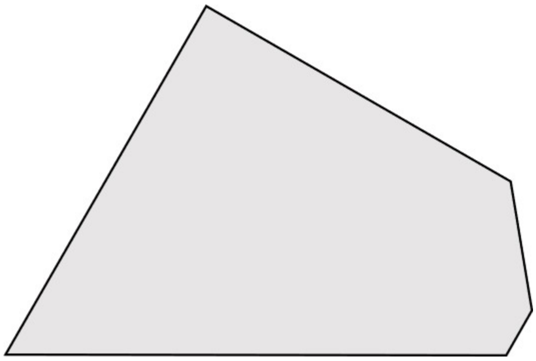
Para sequências com três bolinhas, teremos $2^3 - 2 = 6$ possibilidades.

Para sequências com seis bolinhas, teremos $2^6 - 2 = 62$ possibilidades. Porém, neste caso, como 2 e 3 dividem 6, as sequências de duas e três bolinhas também aparecerão nas sequências de seis bolinhas. Por exemplo, a sequência PC(Preta, Cinza) e a sequência PPC, aparecem, respectivamente, nas seguintes sequências de seis bolinhas: PCPCPC e PPCPPC. Logo, teremos $62 - 2 - 6 = 54$ possibilidades.

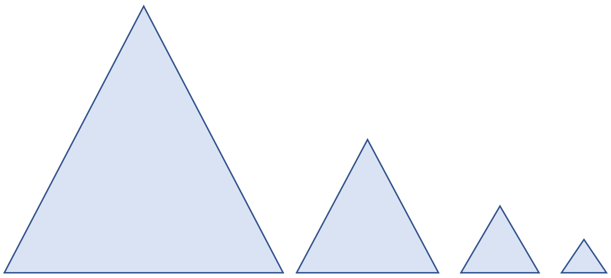
Para sequências com nove bolinhas, teremos $2^9 - 2 = 510$ possibilidades. Porém, como 3 divide 9, as sequências com três bolinhas também aparecerão nas sequências de nove bolinhas. Por exemplo, a sequência PPC aparece na sequência, PPCPPCPPC, de nove bolinhas. Logo, teremos $510 - 6 = 504$ possibilidades.

Portanto, o total de pulseiras elegantes é $2 + 6 + 54 + 504 = 62 + 504 = 566$.

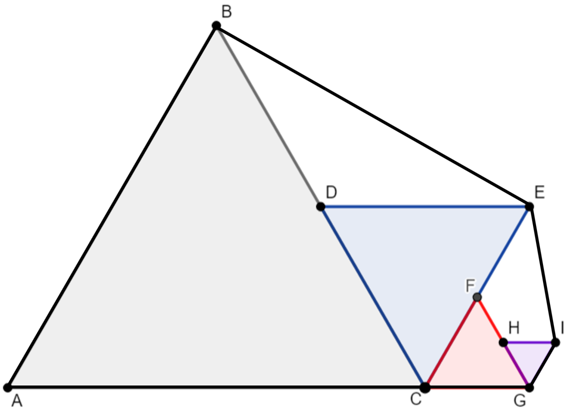
Q2. João gosta de ajudar o seu avô, Seu José, quando ele faz suas "invenções" no quintal de casa. Desta vez, Seu José está aproveitando algumas sobras de cerâmica para cobrir uma parte do piso do quintal representada pela figura abaixo:



Até agora, Seu José encontrou quatro cerâmicas com formato de triângulo equilátero, para fazer sua "arte". O maior triângulo tem lado medindo $AB = 8cm$, o lado do segundo a metade deste, o lado do terceiro a metade do segundo e o lado quarto a metade do terceiro.

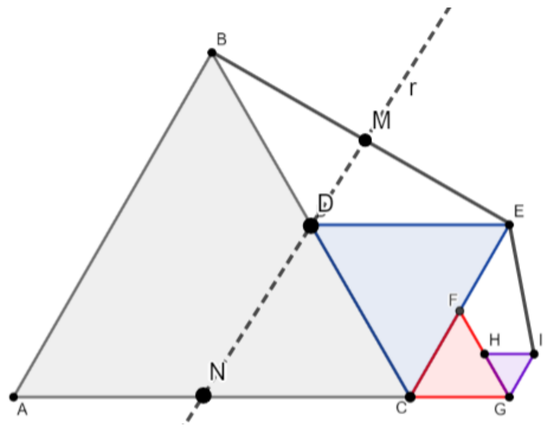


Ao colocar as quatro cerâmicas, Seu José percebeu que ainda faltavam duas regiões para preencher e pediu ajuda ao seu neto nesta tarefa.

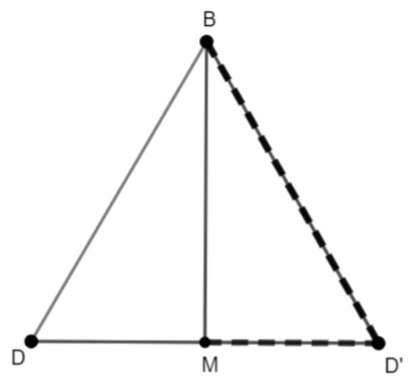


Para terminarem a "arte", quais as medidas dos lados $L = BE$ e $l = EI$ das peças de cerâmica que João precisa achar?

SOLUÇÃO:



$B\hat{D}E = 120°$, pois o $\triangle CDE$ é equilátero. Além disso, $BD = DE = 4$, pois D é ponto médio de BC. Considere a reta r passando por D e paralela ao segmento AB. Como r é paralela a AB, $D\hat{N}C = B\hat{A}C = 60°$. Daí, o triângulo ΔDNC é equilátero. Portanto, N é ponto médio de AC. Ainda pelo fato de r ser paralela a AB, segue que M é ponto médio de BE, com $BM = ME = \frac{L}{2}$. Portanto, os triângulos ΔBMD, ΔDME são congruentes (pelo caso LAL). Daí, segue que r é mediatriz do segmento AE e por consequência, os triângulos ΔBMD, ΔDME são retângulos em M. Agora, consideremos um ponto D' sobre a reta r, de modo que $BD' = BD$, temos então o triângulo $\Delta BDD'$:



Verifiquemos que este triângulo é equilátero.

$\Delta BDD'$ é isósceles, portanto:

$$B\hat{D}'D = B\hat{D}D' = 60° \ .$$

No ΔBMD, temos que:

$$D\hat{B}M = 180° - \left(D\hat{M}B + M\hat{D}B\right) = 180° - (90° + 60°) = 30°.$$

Da mesma forma no $\Delta BMD'$, podemos concluir que:

$$D'\hat{B}M = 30°.$$

Portanto,

$$D\hat{B}D' = 60°.$$

Portanto, $\Delta BDD'$ é um triângulo equilátero.

Daí, ΔBMD é congruente ao $\Delta BMD'$, pelo caso de congruência LAL. Assim, M é o ponto médio de DD'. Disto, segue que:

$$DM = \frac{BD}{2} \ .$$

Pelo teorema de Pitágoras no triângulo ΔBMD:

$$BM^2 = BD^2 - DM^2 = BD^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}BD^2 \ .$$

Logo,

$$BM = \frac{\sqrt{3}}{2}BD \ .$$

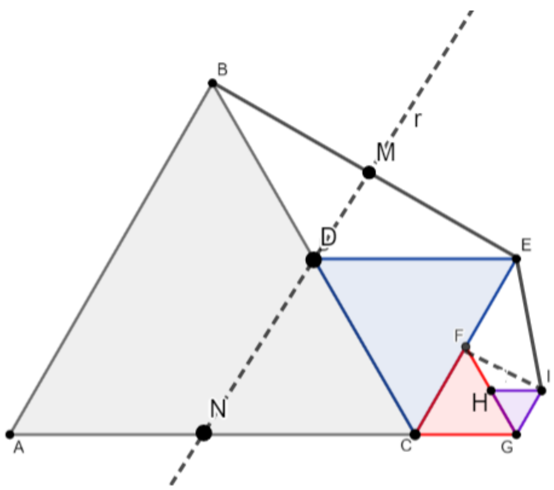
Daí,

$$\frac{\frac{L}{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Portanto,

$$L = 4\sqrt{3} \ .$$

$E\hat{F}H = 120°$, pois o $\triangle CFG$ é equilátero. $FE = 2$, $FH = 1$, pois F, H são pontos médios de CE, FG.



$F\hat{H}I = 120°$, pois o $\triangle GHI$ é equilátero. E copiando o mesmo argumento utilizado acima no triângulo ΔDFE para o triângulo ΔFHI, obtemos:

$$FI = 1.\sqrt{3} = \sqrt{3} \ .$$

$F\hat{H}I = 30°$, pois o $\triangle FHI$ é isósceles. Assim,

$$E\hat{F}I = E\hat{F}H - H\hat{F}I = 120°\text{-}30°\text{=}90°.$$

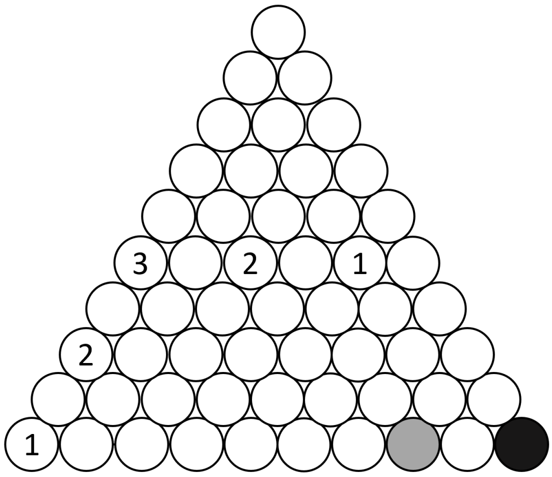
Logo, pelo Teorema de Pitágoras no $\triangle EFI$:

$$l^2 = EF^2 + FI^2 = 2^2 + 3 = 7 \ .$$

Portanto,

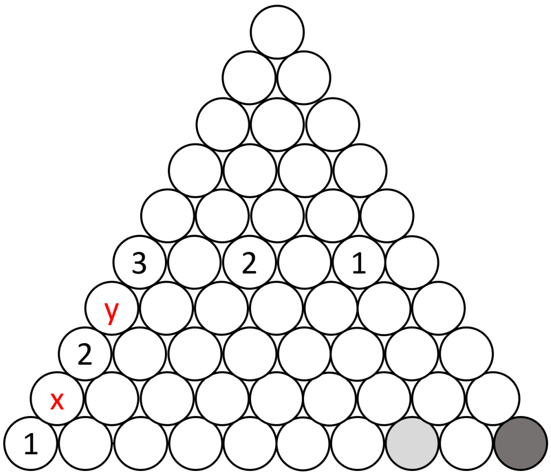
$$l = \sqrt{7} \ .$$

Q3. Na figura abaixo, vamos escrever números naturais dentro de cada círculo de modo que a soma dos números escritos em cinco círculos alinhados e consecutivos seja sempre a mesma.



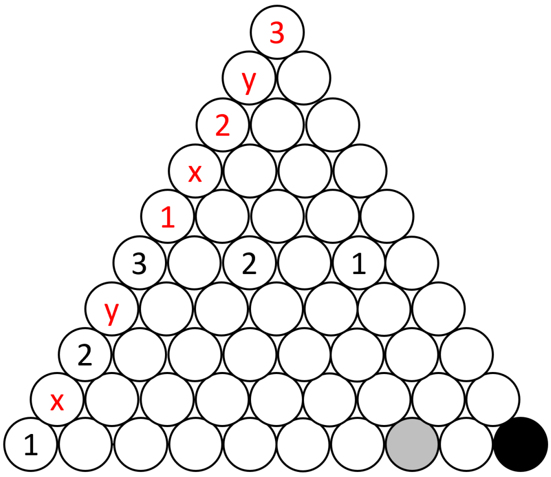
Determine os números escritos nos círculos cinza e preto, de modo que a soma de todos os números escritos nos círculos da figura seja igual a 165 e a diferença entre o número escrito no círculo preto e o número escrito no círculo cinza seja igual a 1.

SOLUÇÃO: Para determinar os números escritos nos círculos preto e cinza, considere x e y os números que aparecem entre 1, 2 e 3.

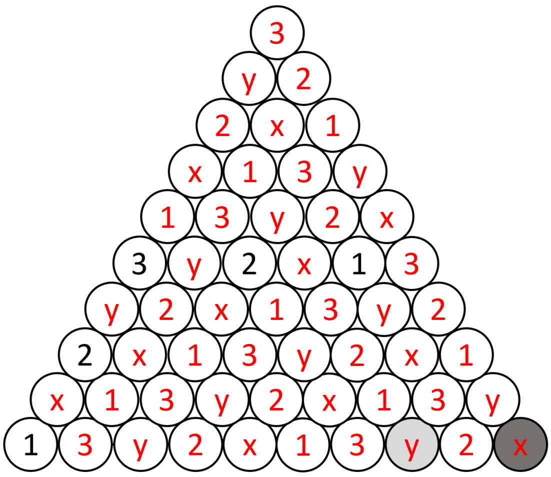


Como a soma dos números escritos em cinco círculos alinhados e consecutivos deve ser sempre a mesma a sequência de números escritos nessa diagonal seguir a ordem

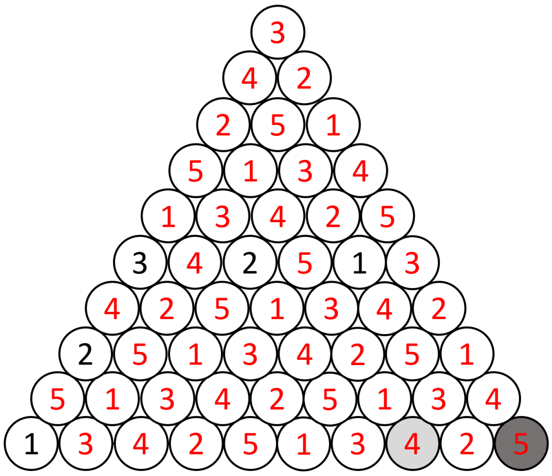
$$1 \quad x \quad 2 \quad y \quad 3 \quad 1 \quad x \quad 2 \quad y \quad 3$$



Seguindo, essa estratégia, preenche-se todos os círculos no triângulo



Note agora que cada número irá aparecer 11 vezes no triângulo. Logo, queremos x e y de modo que $11(x+y+1+2+3) = 165$ e $x-y=1$, ou seja, $x+y+1+2+3=15$ e $x-y=1$. Resolvendo o sistema de equações, chegamos em $x=5$ e $y=4$.



Q4. Um número inteiro positivo T par e menor do que 500 admite 8 divisores positivos, sendo 13 um deles. Determine todas as possibilidades para T.

SOLUÇÃO: Primeiramente, dado um número N e sua decomposição em fatores primos

$$N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}.$$

O número de divisores de N é dado por:

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \ldots (n_k + 1).$$

Como T é um número par, divisível por 13 e admite 8 divisores, sua decomposição em fatores primos é da forma

$$T = 2^a 13^b p^c,$$

de modo que

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 8.$$

Aqui não é possível ter na decomposição um primo q diferente de 2, 13 e p, pois, se existisse o número de divisores de T seria maior do que 8. Assim, as possibilidades para a, b e c são:

$a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$, então $T = 26p$, como T é menor do que 500, temos $26p < 500$, ou seja, $p < 19,2$. Assim, $p = 3, 5, 7, 11, 17$ e 19 e as possibilidades são $T = 78, 130, 182, 286, 442, 494$.

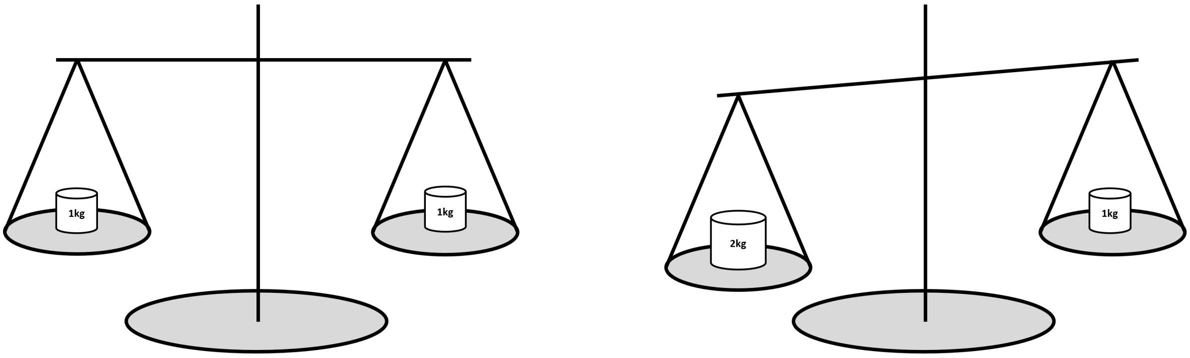
$a = 3$, $b = 1$ e $c = 0$, então $T = 8 \times 13 = 104$.

$b = 3$, $a = 1$ e $c = 0$, então $T = 2 \times 13^3 > 500$.

Portanto, as 7 possibilidades para T são: $T = 78, 104, 130, 182, 286, 442, 494$.

Q5. Em um grupo de 8 moedas, sendo 5 moedas verdadeiras de mesmo peso M e 3 moedas falsas de mesmo peso m, com m menor do que M, isto é, as moedas falsas são mais leves do que as moedas verdadeiras. Suponha que você dispõe de uma balança constituída de dois pratos de modo que você pode comparar os pesos de dois grupos de objetos dispostos em cada prato da seguinte maneira: Ao colocar os objetos de cada grupo nos pratos, se os pesos dos dois grupos de objetos são iguais, então os pratos vão ficar na mesma altura, caso contrário um grupo de objetos pesa mais que o outro e o grupo mais pesado estará no prato posicionado embaixo do outro prato (conforme figura abaixo).

Qual o número mínimo de pesagens necessárias para encontrar um par com uma moeda verdadeira e uma falsa?



SOLUÇÃO: Vamos denotar as moedas verdadeiras por V e as falsas por F.

Dentre as oito moedas selecione duas para compor o Grupo 1, duas para compor o Grupo 2 e as quatro restantes comporão o Grupo 3. Comparamos o peso das moedas dos Grupos 1 e 2 na balança. Temos 2 casos a considerar:

Caso 1: A soma dos pesos das duas moedas do Grupos 1 e igual a soma dos pesos das duas moedas do Grupo 2. (Configuraçoes possíveis - Grupo 1: VV Grupo 2: VV e Grupo 3: VFFF ou Grupo 1: VF, Grupo 2: VF e Grupo 3: VVVF).
Nesse caso, no Grupo 3 existirá três moedas verdadeiras e uma falsa ou três moedas falsas e uma verdadeira. Escolha duas dentre as moedas do Grupo 3 e fazemos a segunda pesagem colocando uma moeda em cada prato. Se elas tiverem pesos diferentes achamos as duas moedas desejadas. Se elas tiverem pesos iguais as duas moedas restantes do Grupo 3 terão pesos diferentes.

Caso 2: A soma dos pesos das duas moedas do Grupo 1 é diferente da soma dos pesos das duas moedas do Grupo 2. (Configurações possíveis - Grupo 1: VV e Grupo 2: VF ou Grupo 1: VV e Grupo 2: FF ou Grupo 1: VF e Grupo 2: FF).

Neste caso, escolha uma moeda de cada um dos dois grupos para a segunda pesagem. Se estas moedas tiverem pesos diferentes acabou. Senão as duas moedas que selecionamos tem pesos iguais. Como os dois grupos com duas moedas possuem pesos diferentes e as moedas que selecionamos para a segunda pesagem possuem pesos iguais, concluímos que a moeda do primeiro grupo e a moeda do segundo grupo que não foram selecionadas para a segunda pesagem possuem pesos diferentes.

Com esse argumento, provamos que somos capazes de selecionar ujm par com uma moeda verdadeira e uma falsa com duas pesagens. Uma vez que não é possível selecionar a moeda mais pesada e a mais leve com uma única pesagem concluímos que o número mínimo de pesagens para selecionaro par desejado é dois.