



Olimpíada Pernambucana de Matemática 2021

NÍVEL 3

Caderno de Questões



LEIA COM ATENÇÃO

- 01.** Só inicie a prova após ler as instruções;
- 02.** Coloque no início da sua folha de respostas os seus dados pessoais informados no final desta folha;
- 03.** A prova é composta de 5 questões: 1 questão de Verdadeiro ou Falso e 4 questões dissertativas. Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos;
- 04.** As soluções deverão ser registradas preferencialmente em apenas um lado das folhas A4 brancas, ficando proibidos os escritos no verso;
- 05.** As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas;
- 06.** Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir;
- 07.** Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais;
- 08.** Duração da prova: 4 horas;
- 09.** Após o término do exame, os (as) estudantes terão até 30 minutos para realizar a digitalização e o envio e não podem escrever nada a mais nas provas durante esse período. Envie também as folhas de rascunho;
- 10.** A prova deve ser enviada preferencialmente em um arquivo único no Google Classroom em formato PDF. O nome do arquivo deve ser código de inscrição do estudante, exemplo 1234567891.pdf.

NOME: _____

IDENTIDADE: _____ ÓRGÃO EXPEDIDOR: _____

ASSINATURA: _____

1. Seja BC o diâmetro de um semicírculo centrado em O e seja A o ponto médio do semicírculo. Seja Q um ponto sobre o arco AB . Seja P o pé da perpendicular do ponto A sobre o segmento BQ .

Segundo estas hipóteses, julgue as afirmações a seguir atribuindo (V) se a afirmação for VERDADEIRA ou (F) se a afirmação for FALSA.

(A) (V) (F) O ângulo BQC é reto.

(B) (V) (F) O quadrilátero $OPAB$ é inscritível.

(C) (V) (F) Se R é o ponto de interseção, os triângulos $\triangle RPA$ e $\triangle CQB$ não são semelhantes.

(D) (V) (F) O ângulo $\widehat{BPO}$ é de 30° .

(E) (V) (F) $\overline{BP} = \overline{PQ} + \overline{QC}$

- 2.** Considere o quadrado $\square ABCD$, N e M são pontos médios dos lados DC e CB , respectivamente. Seja P o ponto de interseção dos segmentos BN e AM . Então, a razão entre as áreas do quadrilátero $PMCN$ e do quadrado $\square ABCD$ é igual a:

- 3.** Arthur encontrou uma grande quantidade de livros e teve a ideia de empilha-los na borda de uma mesa da seguinte forma: O livro da base, ou seja, aquele que está mais embaixo encontra-se inteiramente em cima da mesa de modo que sua extremidade coincide com a extremidade (borda) da mesa; O 1º livro, livro do topo, se estende metade do seu comprimento em relação ao 2º livro; o 2º livro se estende um quarto de seu comprimento em relação ao 3º, o 3º livro se estende um sexto de seu comprimento em relação ao quarto e assim sucessivamente.

Taci, sua mãe, perguntou: Empilhando dessa forma é possível que o livro do topo fique inteiramente além da mesa? E afirmou: isso só acontecerá se a coordenada x_G do centro de gravidade do empilhamento dada pela média ponderada

$$x_G = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

em que $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as coordenadas dos centros de gravidades de cada livro e $m_1, m_2, \dots, m_n$ suas respectivas massas, estiver sobre a mesa. Sabendo que todos os livros têm a mesma forma de paralelepípedo retângulo de base $L \times L$ e mesma massa, responda a pergunta feita por Taci justificando a sua resposta.

4. Pensando em sua segurança, a mãe de Dafne a proibiu de entrar na cozinha. Certo dia, sua mãe a encontra a um passo de entrar na cozinha. Lembrando que Dafne adora brinquedos, sua mãe pega uma sacola que contém n de seus brinquedos favoritos e n brinquedos dos quais não se interessa muito. A cada passo que Dafne está prestes a dar, sua mãe pega aleatoriamente um brinquedo na sacola, mostra a Dafne e depois deixa o brinquedo no chão. Se o brinquedo em questão for um dos que ela não se interessa muito, Dafne dá um passo em direção a cozinha e se for um de seus favoritos, ela dá um passo na direção oposta. Qual a probabilidade de que Dafne entre na cozinha?

5. Qual é o dígito da posição 2021 de 8095! (Contando da direita para esquerda)?