Olimpíada Pernambucana de Matemática 2021

NÍVEL 3

Caderno de Questões Com Resoluções

LEIA COM ATENÇÃO

01. Só inicie a prova após ler as instruções;

02. Coloque no início da sua folha de respostas os seus dados pessoais informados no final desta folha;

03. A prova é composta de 5 questões: 1 questão de Verdadeiro ou Falso e 4 questões dissertativas. Para cada questão será atribuído um valor máximo de 60 pontos, totalizando 300 pontos;

04. As soluções deverão ser registradas preferencialmente em apenas um lado das folhas A4 brancas, ficando proibidos os escritos no verso;

05. As soluções dos exercícios poderão ser feitas a lápis ou à caneta. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de enviá-la. Passagens ilegíveis poderão ser desconsideradas;

06. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir;

07. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais;

08. Duração da prova: 4 horas;

09. Após o término do exame, os (as) estudantes terão até 30 minutos para realizar a digitalização e o envio e não podem escrever nada a mais nas provas durante esse período. Envie também as folhas de rascunho;

10. A prova deve ser enviada preferencialmente em um arquivo único no Google Classroom em formato PDF. O nome do arquivo deve ser código de inscrição do estudante, exemplo 1234567891.pdf.

NOME: ____

IDENTIDADE: ________________ ÓRGÃO EXPEDIDOR: ________________________

ASSINATURA: ____

Olimpíada Pernambucana de Matemática 2021

NÍVEL 3

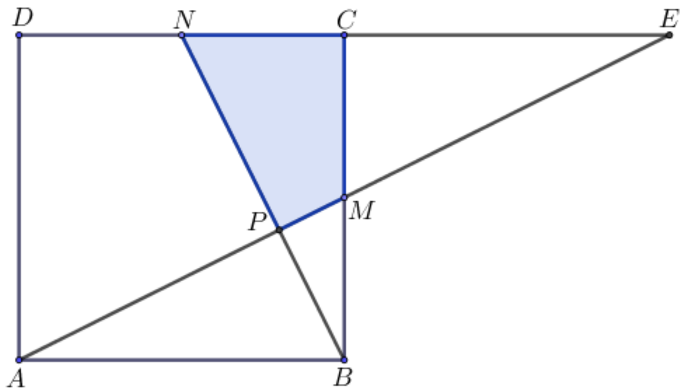
Caderno de Questões Com Resoluções

1. OBSERVAÇÃO: Questão anulada devido ao erro tipográfico na versão divulgada para os(as) estudantes.

2. Considere o quadrado $\square ABCD$, N e M são pontos médios dos lados DC e CB, respectivamente. Seja P o ponto de interseção dos segmentos BN e AM. Então, a razão entre as áreas do quadrilátero $PMCN$ e do quadrado $\square ABCD$ é igual a:

Solução 1.

Seja E a interseção da prolongação dos intervalos AM e DC.



Considerando o quadrado $\square ABCD$, temos

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = x.$$

Por um lado, os triãngulos ΔADE e ΔMCE são semelhantes pelo critério ângulo ângulo. Desde que M é o ponto médio do segmento BC então $\overline{MC} = \frac{x}{2}$ e pelo critério de semelhança, temos

$$\frac{x}{x + \overline{CE}} = \frac{\frac{x}{2}}{\overline{CE}}.$$

Assim, podemos concluir que $\overline{CE} = x$.

Por outro lado, os trângulos ΔABP e ΔNPE são semelhantes pelo critério ângulo ângulo. No que segue denotaremos por h a altura do triângulo ΔABP relativa a base AB e por H a altura do triângulo ΔNPE relativa a base NE. Além disso, desde que N é o ponto médio do segmento DC então $\overline{NC} = \frac{x}{2}$. Pelo critério de semelhança, temos

$$\begin{aligned} \frac{H}{h} &= \frac{\overline{NE}}{x} \\ &= \frac{\frac{x}{2} + x}{x} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $2H - 3h = 0$. Além disso, $H + h = x$.

Resolvendo o sistema de equações, obtemos $h = \frac{2x}{5}$.

No que segue, denotamos a área do triângulo ΔXYZ por $A(\Delta XYZ)$. Cálculo da área do triângulo ΔPBM.

$$\begin{aligned}
A(\Delta PBM) &= A(\Delta ABM) - A(\Delta ABP) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BM} - \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h \\
&= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{2x}{5} \\
&= \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{5} \\
&= \frac{x^2}{20}.
\end{aligned}$$

Finalmente, a área do quadrilátero $PMCN$ é dada por

$$\begin{aligned} A(PMCN) &= A(\Delta NCB) - A(\Delta PBM) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{NC} - \frac{x^2}{20} \\ &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{2} - \frac{x^2}{20} \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{20} \\ &= \frac{x^2}{5}. \end{aligned}$$

Portanto, a razão entre as áreas do quadrilátero $PMCN$ e do quadrado $\square ABCD$ será

$$\frac{A(PMCN)}{A(\square ABCD)} = \frac{\frac{x^2}{5}}{x^2} = \frac{1}{5}. \tag{1}$$

Solução 2.

Temos, $[PBM] + [PMCN] = \frac{1}{4}[ABCD]$ Representamos por x a medida do lado do quadrado $ABCD$, temos $NC = CM = \frac{x}{2}$. Como os triângulos $\triangle CME$ e $\triangle BMA$ são congruentes (critério ALA), segue que $CE = x$.

Aplicando o teorema de Menelaus, ao $\triangle NBC$ e reta transversal $\overleftrightarrow{PME}$, temos:

$$\frac{EC}{EN} \cdot \frac{PN}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} = 1.$$

Agora, substituindo as medidas dos segmentos conhecidos em relação a x na relação acima, obtemos,

$$\frac{x}{3x/2} \cdot \frac{PN}{PB} \cdot \frac{x/2}{x/2} = 1,$$

que fornece

$$\frac{PN}{PB} = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{PB}{PN} = \frac{2}{3}.$$

Note que as alturas H (repeito do lado BC) do $\triangle BCN$ e h (respeito do lado BM) do $\triangle PBM$ satisfazem

$$\frac{H}{h} = \frac{BN}{BP} = \frac{BP + PN}{BP} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Resultado que segue usando a semelhança dos triângulos NCB e PQB, onde Q é o pé da altura do ponto P no segmento MB. Agora, sendo $H = \frac{x}{2}$, obtemos que $h = \frac{x}{5}$. Assim,

$$\frac{[BMP]}{[BMP] + [PMCN]} = \frac{[BMP]}{[BCN]} = \frac{\frac{h \cdot x/2}{2}}{\frac{x^2}{4}} = \frac{\frac{x}{5} \cdot \frac{x}{4}}{\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{5}.$$

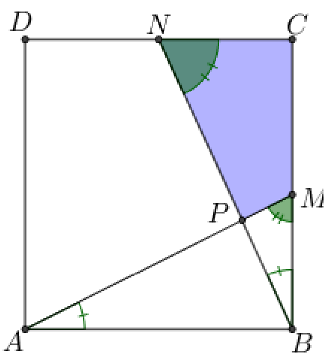
Isto fornece que,

$$\frac{[BMP]}{1/4[ABCD]} = \frac{1}{5} \;\Rightarrow\; \frac{[BMP]}{[ABCD]} = \frac{1}{20}.$$

Agora, como a área do quadrilátero $PMCN$ é a diferença entre as áreas dos triângulos $\triangle NBC$ e $\triangle BMP$, obtemos

$$\frac{[PMCN]}{[ABCD]} = \frac{[NBC] - [BMP]}{[ABCD]} = \frac{[NBC]}{[ABCD]} - \frac{[BMP]}{[ABCD]} = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$$

Solução 3.



É claro que os $\triangle ABM$ é congruente com $\triangle BCN$, o que segue aplicando o critério LAL. Daí, podemos obter que

$$\begin{cases} \widehat{BAM} = \widehat{CBN} \\ \widehat{BMA} = \widehat{CNB} \end{cases}$$

Portanto, $\triangle BMP \approx \triangle BNC$ (semelhantes).

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABM$ (ou $\triangle BCN$), obtemos $AM = BN = \frac{\sqrt{5}}{2}\ell$, onde ℓ é o comprimento do lado do quadrado $ABCD$, pois

$$BN^2 = NC^2 + CB^2 = (\ell/2)^2 + \ell^2 = \frac{5}{4}\ell.$$

A razão de semelhança dos $\triangle BMP$ e $\triangle BNC$ é:

$$r = \frac{BN}{BM} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\ell}{\ell/2} = \sqrt{5} \qquad \left[= \frac{\text{hipotenusa de}\triangle BNC}{\text{hipotenusa de}\triangle BMP}\right].$$

Com isto, temos:

$$(\bullet) \quad \sqrt{5} = \tfrac{NC}{PM} \Rightarrow PM = \tfrac{\ell/2}{\sqrt{5}} = \tfrac{\sqrt{5}}{10}\ell$$
$$(\bullet) \quad \sqrt{5} = \tfrac{CB}{PM} \Rightarrow PB = \tfrac{\ell}{\sqrt{5}} = \tfrac{\sqrt{5}}{5}\ell$$

Segue que

$$[PBM] = \text{área}(\triangle PBM) = \frac{PM \cdot PB}{2} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{10}\ell \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}\ell}{2} = \frac{1}{20}\ell^2.$$

Logo,

$$[PMCN] = [NBC] - [PBM] = \frac{1}{4}\ell^2 - \frac{1}{20}\ell^2 = \frac{4}{20}\ell^2 = \frac{1}{5}\ell^2.$$

Daí,

$$\frac{[PMCN]}{[ABCD]} = \frac{\frac{1}{5}\ell^2}{\ell^2} = \frac{1}{5}.$$

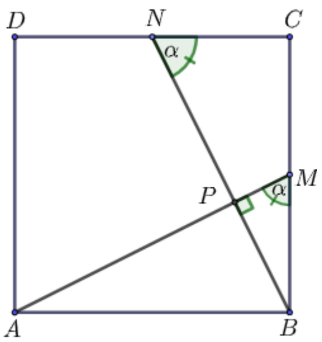
Variante 01: Uma vez que a razão de semelhança entre os triângulos $\triangle BMP$ e $\triangle BNC$ é $\sqrt{5}$, então a razão entre as áreas dos triângulos $\triangle BNC$ e $\triangle BMP$ verifica

$$\frac{1}{5} = \frac{[BMP]}{[BNC]} = \frac{[BNC] - [PMCN]}{[BNC]} = 1 - \frac{[PMCN]}{\frac{1}{4}[ABCD]}.$$

Daí,

$$\frac{[PMCN]}{[ABCD]} = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}.$$

Variante 02: (trigonometria para calcular PB e PM).



Em $\triangle BCN$, temos

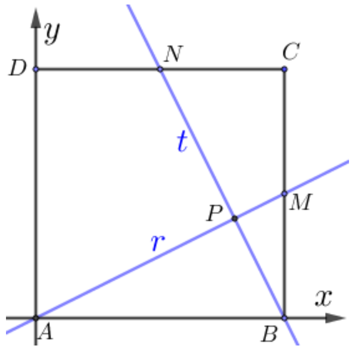
$$(\bullet) \ \text{sen}\,\alpha = \frac{\ell}{\frac{\sqrt{5}}{2}\ell} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad\qquad (\bullet) \ \cos\alpha = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\ell} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Agora no $\triangle PBM$ (reto em P), usando os valores de $sen\alpha$ e $\cos\alpha$ obtidos acima, temos

$$(\bullet) \ \text{sen}\,\alpha = \tfrac{PB}{\ell/2} \Rightarrow PB = \tfrac{\ell}{2} \cdot \tfrac{2\sqrt{5}}{5} = \tfrac{\sqrt{5}}{2}\ell$$
$$(\bullet) \ \cos\alpha = \tfrac{PM}{\ell/2} \Rightarrow PM = \tfrac{\ell}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{5}}{5} = \tfrac{\sqrt{5}}{10}\ell$$

O resto segue como na solução dada anteriormente.

Solução 4. Usando coordenadas.



Segundo o desenho ao lado, usando que o comprimento do lado do quadrado é ℓ, temos:

$$A(0,0),\quad B(\ell,0),\quad C(\ell,\ell),\quad D(0,\ell)$$
$$M(\ell,\ell/2),\quad N(\ell/2,\ell)$$

A seguir, vamos determinar as coordenadas do ponto P.

- Equação da reta r que passa por A e M é dada por:
$$y-0=\frac{\ell-0}{\ell/2-\ell}\,(x-0)\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}x$$
- Equação da reta t que passa por B e N, é:
$$y-0=\frac{\ell-0}{\ell/2-\ell}\,(x-\ell)\ \Rightarrow\ y=-2\,(x-\ell)$$

O ponto P é a interseção das retas r e t.

$$\begin{cases} r: x-2y=0 \\ t: 2x+y=2\ell \end{cases} \qquad \begin{matrix} -2(r)+(t): 5y=2\ell\ \Rightarrow\ y=\frac{2}{5}\ell \\ x=2y=2\left(\frac{2}{5}\ell\right)=\frac{4}{5}\ell \end{matrix}. \qquad \text{Logo, } P\left(\frac{4}{5}\ell,\frac{2}{5}\ell\right).$$

Agora, calculamos a área do triângulo determinado pelos pontos B, M e P, $[BMP]$. Temos

$$[BMP]=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \ell & 0 & 1 \\ \ell & \ell/2 & 1 \\ \frac{4}{5}\ell & \frac{2}{5}\ell & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \ell & 0 & 1 \\ 0 & \ell/2 & 0 \\ -\frac{1}{5}\ell & \frac{2}{5}\ell & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\ell}{5}\right)=\frac{1}{20}\ell$$

Como,

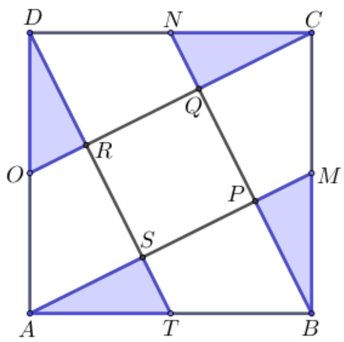
$$[PMCN]=[NBC]-[BMP]=\frac{1}{4}\ell^2-\frac{1}{20}\ell^2=\frac{4}{20}\ell^2=\frac{1}{5}\ell^2.$$

Segue que,

$$\frac{[PMCN]}{[ABCD]}=\frac{\frac{1}{5}\ell^2}{\ell^2}=\frac{1}{5},$$

Solução 5. Geométrica.

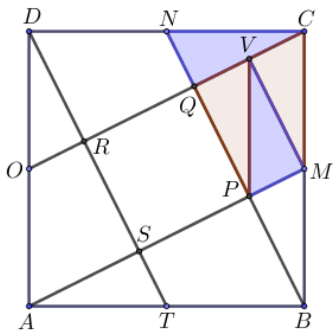
Consiste em dividir o quadrado $ABCD$ em 20 triângulos congruentes, onde o quadrilátero $PMCN$ é composto por 4 desses triângulos.



Na figura ao lado, O é ponto médio de AD e T é ponto médio de AB. Usando o critério ALA, os triângulos a seguir (em azul) são congruentes:

$$\triangle PMB,\quad \triangle QNC,\quad \triangle ROD,\quad \triangle STA$$

Ainda, é claro que tais triângulos são retângulos. Ou seja, os ângulos em P, Q, R e S são retos



Na figura ao lado, V é o ponto médio do segmento QC. Como M é ponto médio de CB, segue que VM é paralelo a QB e $VM=\frac{1}{2}QB$. Ainda, $PMCQ$ é um retângulo e os triângulos $\triangle MVP$, $\triangle QPV$ são congruentes. Além disso, é claro que (pelo critério ALA), $\triangle VMC$ é congruente com $\triangle QPV$. Usando que OC é paralelo a AM e que VM é paralelo a QB, pelo critério ALA, segue que $\triangle VCM$ é congruente a $\triangle PMB$. Note que o quadrilátero $PMCN$ é composto por 4 triângulos congruentes e que o triângulo NCB por 5.

Finalmente, sendo os triângulos: $\triangle NCB$, $\triangle TBN$, $\triangle DNT$ e $\triangle TAD$ congruentes, segue que o quadrado $ABCD$ possui 20 triângulos menores congruentes. Daí,

$$\frac{[PMCN]}{[ABCD]} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

3. Arthur encontrou uma grande quantidade de livros e teve a ideia de empilha-los na borda de uma mesa da seguinte forma: O livro da base, ou seja, aquele que está mais embaixo encontra-se inteiramente em cima da mesa de modo que sua extremidade coincide com a extremidade (borda) da mesa; O $1^{\underline{o}}$ livro, livro do topo, se estende metade do seu comprimento em relação ao $2^{\underline{o}}$ livro; o $2^{\underline{o}}$ livro se estende um quarto de seu comprimento em relação ao $3^{\underline{o}}$, o $3^{\underline{o}}$ livro se estende um sexto de seu comprimento em relação ao quarto e assim sucessivamente.

Taci, sua mãe, perguntou: Empilhando dessa forma é possível que o livro do topo fique inteiramente além da mesa? E afirmou: isso só acontecerá se a coordenada x_G do centro de gravidade do empilhamento dada pela média ponderada

$$x_G = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as coordenadas dos centros de gravidades de cada livro e $m_1, m_2, \ldots, m_n$ suas respectivas massas, estiver sobre a mesa. Sabendo que todos os livros têm a mesma forma de paralelepípedo retângulo de base $L \times L$ e mesma massa, responda a pergunta feita por Taci justificando a sua resposta.

Solução:

Colocando a origem do eixo x no ponto do livro mais afastado da borda da mesa temos que

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{L}{2} \\
x_2 &= \frac{L}{2} + \frac{L}{2(n-1)} \\
x_3 &= \frac{L}{2} + \frac{L}{2(n-1)} + \frac{L}{2(n-2)} \\
&\ldots\ldots \\
x_{n-1} &= \frac{L}{2} + \frac{L}{2(n-1)} + \frac{L}{2(n-2)} + ... + \frac{L}{2(n-(n-2))} \\
x_n &= \frac{L}{2} + \frac{L}{2(n-1)} + \frac{L}{2(n-2)} + ... + \frac{L}{2(n-(n-2))} + \frac{L}{2(n-(n-1))}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Como todos os livros possuem a mesma massa m, podemos cancelar m no numerador e no denominador na expressão de x_G. Assim,

$$
\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{n}\left[\frac{L}{2} + \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2(n-1)}\right) + \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2(n-1)} + \frac{L}{2(n-2)}\right) + \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2(n-1)} + \frac{L}{2(n-2)}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{n}\left[\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2(n-1)} + \frac{L}{2(n-2)} + ... + \frac{L}{2(n-(n-2))}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{n}\left[\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2(n-1)} + \frac{L}{2(n-2)} + ... + \frac{L}{2(n-(n-2))} + \frac{L}{2(n-(n-1))}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[n\left(\frac{L}{2}\right) + (n-1)\left(\frac{L}{2(n-1)}\right) + (n-2)\left(\frac{L}{2(n-2)}\right) + \right] + ... \\
&+ \frac{1}{n}\left[(n-(n-2))\left(\frac{L}{2(n-(n-2))}\right) + (n-(n-1))\left(\frac{L}{2(n-(n-1))}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[n\left(\frac{L}{2}\right) + (n-1)\left(\frac{L}{2}\right)\right] \\
&= L\left(\frac{2n-1}{2n}\right).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Como $\frac{2n-1}{2n}$ é menor que 1, $L\left(\frac{2n-1}{2n}\right) < L$ e o centro de gravidade da pilha de livros está sobre a mesa e nesta condição o livro do topo está inteiramente além da mesa.

4. Pensando em sua segurança, a mãe de Dafne a proibiu de entrar na cozinha. Certo dia, sua mãe a encontra a um passo de entrar na cozinha. Lembrando que Dafne adora brinquedos, sua mãe pega uma sacola que contém n de seus brinquedos favoritos e n brinquedos dos quais não se interessa muito. A cada passo que Dafne está prestes a dar, sua mãe pega aleatoriamente um brinquedo na sacola, mostra a Dafne e depois deixa o brinquedo no chão. Se o brinquedo em questão for um dos que ela não se interessa muito, Dafne dá um passo em direção a cozinha e se for um de seus favoritos, ela dá um passo na direção oposta. Qual a probabilidade de que Dafne entre na cozinha?

Solução:

Imagine que a cozinha está a esquerda de Dafne e que uma sequência de movimentos realizada por Dafne pode ser descrita por um anagrama $\mathbf{x}$ de n letras D (representando os passos à direita) e n letras E (representando os passos a esquerda). Dafne não entrará na cozinha se qualquer prefixo $x_1x_2\dots x_k$ de $\mathbf{x}$ tiver pelo menos tantos D's quanto E's.

Seja a o número de D's e b o número de E's em um prefixo $x_1x_2\dots x_k$ de $\mathbf{x}$. Evidentemente, tem-se $a, b \in \{0, 1, \dots, n\}$. Então, em um dado momento, podemos identificar a posição de Dafne pelo par ordenado (a, b) em $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a, b \in \{0, 1, \dots, n\}\}$. O número de anagramas $\mathbf{x}$ corresponde ao número de caminhos de $(0, 0)$ até (n, n) em $\mathcal{R}$ que se situam abaixo da diagonal $y = x$.

Para contar tais caminhos, contemos todos os caminhos possíveis de $(0, 0)$ até (n, n) em $\mathcal{R}$ e retiremos destes aqueles que passam pela diagonal $y = x$. Ora, o número de caminhos de $(0, 0)$ até (n, n) é simplesmente o número de anagramas $\mathbf{x}$ que contém n letras D e n letras E, ou seja, $\binom{2n}{n}$.

Agora considere um caminho que passe pela diagonal $y = x$. Tal caminho necessariamente toca a reta $y = x + 1$ em pelo menos um ponto. Para cada um desses caminhos, construímos um novo caminho da seguinte forma: o novo caminho é idêntico ao caminho original até o primeiro ponto em que toca a reta $y = x + 1$. A partir desde ponto, o novo caminho será simétrico ao caminho original em relação a reta $y = x + 1$. O caminho resultante assim será um caminho de $(0, 0)$ até o ponto $(n - 1, n + 1)$. Além disso, a correspondência entre os caminhos originais e os caminhos refletidos é biunívoca. Segue que o número de caminhos que passam pela diagonal $y = x$ é $\binom{2n}{n-1}$.

Portanto, o número de caminhos que se situam abaixo da diagonal é dado por

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Sendo A o evento em que Dafne entra na cozinha, então a probabilidade de A ocorrer é

$$P(A) = 1 - \frac{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n}{n+1}.$$

5. Qual é o dígito da posição 2021 de 8095! (Contando da direita para esquerda)?

Solução: 8095! possui exatamente 2020 zeros em sua expansão decimal. Para verificar, basta observar que

$$\left[\frac{8095}{5}\right] + \left[\frac{8095}{25}\right] + \left[\frac{8095}{125}\right] \left[\frac{8095}{625}\right] + \left[\frac{8095}{3125}\right] = 2020$$

Temos então que 10^{2020} é a maior potência de 10 que divide 8080 fatorial. Dessa forma defina

$$x = \frac{8080!}{10^{2020}}$$

Observe que o dígito na posição 2021 de 8095 fatorial é o dígito das unidades de x e que x é diferente de zero. Como o expoente da maior potência de 2 que divide 8095! é maior do que 2020, então x é par. Assim,

$$x \equiv 2 \text{ ou } 4 \text{ ou } 6 \text{ ou } 8 (mod 10)$$

Temos que

$$x = \frac{8080!}{10^{2020}} \Rightarrow x = \frac{8080!}{2^{2020}5^{2020}}$$

$$2^{2020}x = \frac{8095!}{5^{2020}}$$

Note que

$$\frac{8095!}{5^{2020}} \equiv (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \ldots (8091 \cdot 8092 \cdot 8093 \cdot 8094) \equiv (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^{1019} \equiv (-1)^{2019} \equiv -1 \mod 5$$

Como $2^{2020} \equiv 1 \mod 5$, segue que

$$x \equiv 2^{2020}x \equiv \frac{8095!}{5^{2020}} \equiv -1 \mod 5$$

Assim temos o sistema de congruências:

$$\begin{cases} x \equiv 0 & \mod 2 \\ x \equiv -1 & \mod 5 \end{cases}$$

Assim, temos que $x \equiv 4 \mod 10$