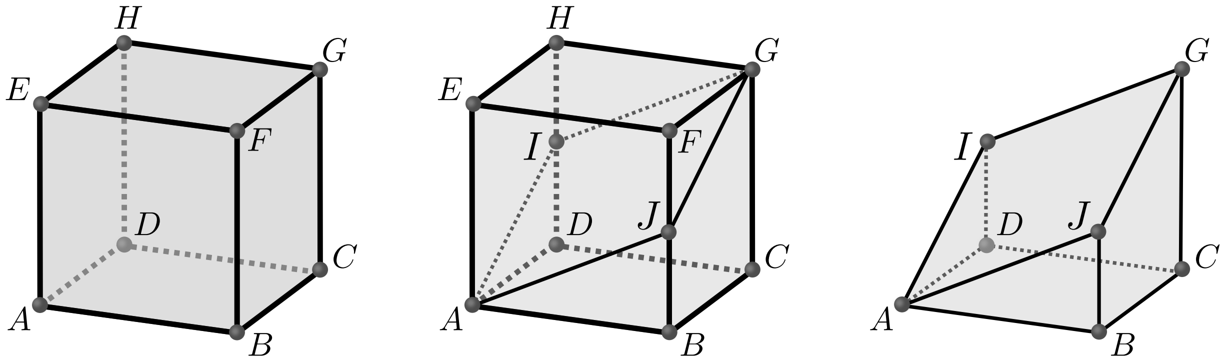
Olimpíada Pernambucana de Matemática 2021

NÍVEL 2

Caderno de Questões Com Resoluções

OPEMAT

Q1. Edgar sempre gostou do jogo de quebra-cabeça chamado "Cubo Mágico" seu aniversário de 33 anos, a mãe de Edgar encomendou um bolo no formato de um cubo perfeito. Na hora de dar o primeiro pedaço do bolo, Edgar resolveu inovar com um corte na diagonal passando pelo vértice G, pelos pontos médios dos segmentos DH e BF e pelo vértice A, conforme a figura abaixo. Edgar deu a primeira parte retirada para a sua mãe. Em seguida ele fez outro corte retilíneo perfeito passando pelos vértices I, J e paralelo a base do bolo $ABCD$, e deu o pedaço de cima para seus dois filhos, Estela e Júlio. O restante do bolo (a base que restou) ele comeu com sua esposa Lorena. Com relação aos pedaços de sua mãe, de Júlio e Estela, e de Edgar e Lorena, que fração do bolo cada pedaço corresponde respectivamente?



(A) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ e $\frac{5}{9}$.

(B) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ e $\frac{4}{9}$.

(C) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$.

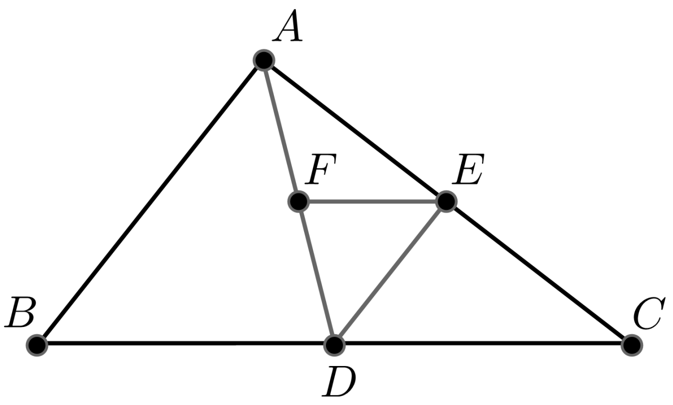
(D) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$.

(E) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{12}$ e $\frac{5}{12}$.

RESPOSTA: Item (E).

Solução: Por simetria, o primeiro corte divide o bolo ao meio, portanto a mãe de Edgar ficou com $1/2$ do bolo, e resta $1/2$ do bolo na mesa. O segundo corte divide o restante do bolo de modo que o pedaço de cima se encaixa na parte de baixo que sobra por simetria. Dessa forma, esse pedaço corresponde a $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ do restante do bolo. Por fim, a fração que resta para Edgar e Lorena é o quanto falta para 1 inteiro, que é igual a $1-1/2-1/12 = 5/12$.

Q2. Considere um pedaço de cartolina com formato de uma região triangular ΔABC cuja medida da área é $48cm^2$. Em uma aula de Geometria Plana, pediu-se para que uma aluna construísse uma nova região triangular ΔDEF, em que D, E e F são pontos médios dos segmentos BC, CA e AD, respectivamente. Então podemos afirmar que a medida da área da região ΔDEF triangular é dada por:



(A) $9\ cm^2$.

(B) $8\ cm^2$.

(C) $7\ cm^2$.

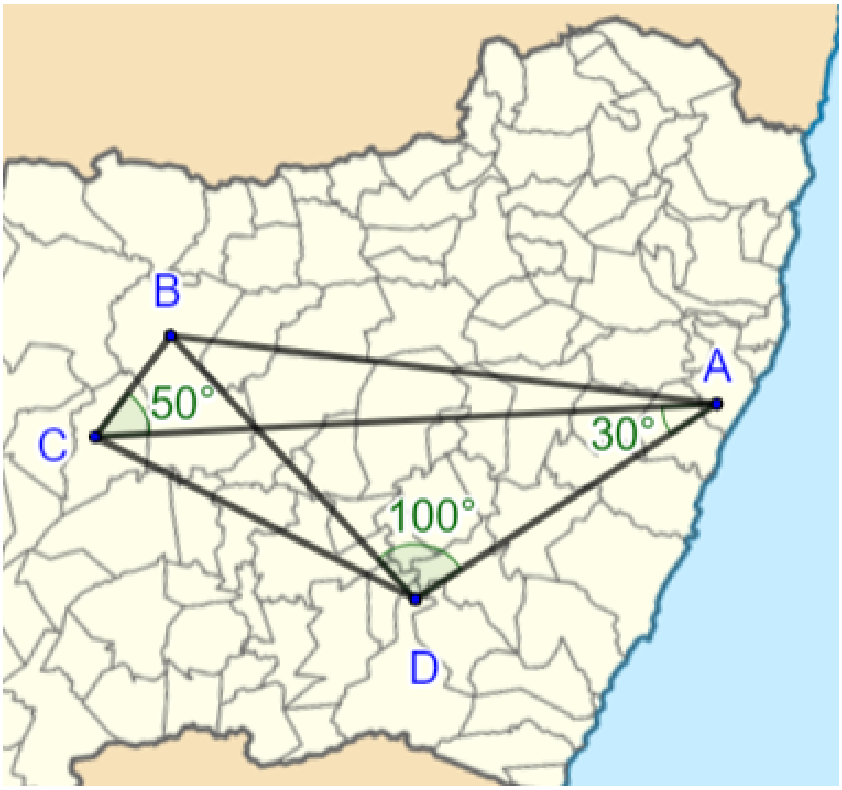
(D) $6\ cm^2$.

(E) $5\ cm^2$.

Resposta: Item (D).

Solução: Como $\overline{BD} = \overline{DC} = \frac{\overline{BC}}{2}\ cm$ então a área do triângulo ΔADC vale $24\ cm^2$. Desde que $\overline{CE} = \overline{EA} = \frac{\overline{CA}}{2}\ cm$ então a área do triângulo ΔADE vale $\frac{1}{2} \cdot 24 = 12\ cm^2$. De maneira análoga, desde que $\overline{AF} = \overline{FD} = \frac{\overline{AD}}{2}\ cm$ então a área do triângulo ΔDEF vale $\frac{1}{2} \cdot 12 = 6\ cm^2$.

Q3. Arthur decidiu visitar seus parentes nas cidades de Caruaru, São Caetano e Água Preta, localizadas, respectivamente, nos pontos B, C e D do mapa. Ao marcar no mapa o local da sua residência no ponto A em Recife, ele notou que a medida do segmento AD no mapa é igual a medida do segmento BD. Arthur percebeu que a situação daria uma boa questão de matemática ao verificar que $D\widehat{A}C = 30°$, $B\widehat{C}A = 50°$ e $B\widehat{D}A = 100°$, conforme a figura abaixo. Então, Arthur quer saber: qual o ângulo formado pelos segmentos que ligam a localização de seu parente que mora em Água Preta às localizações de seus parentes que moram em São Caetano e Caruaru?



(A) 15°

(B) 20°

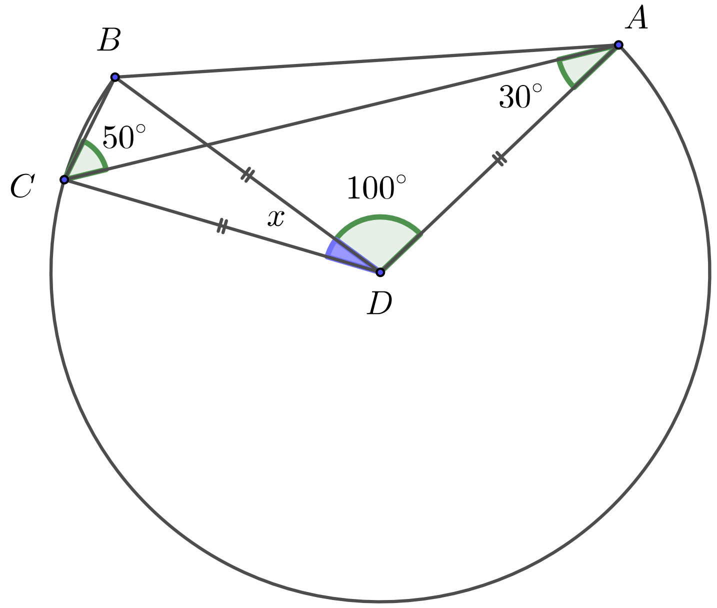
(C) 25°

(D) 30°

(E) 35°

Resposta: Item (B).

Solução: As condições $\overline{AD} = \overline{BD}$ e $A\hat{D}B = 2 \cdot A\hat{C}B$ (com C e D no mesmo semiplano determinado pela reta AB, conforme a figura) implicam que C pertence ao arco capaz (de centro D) do ângulo de medida $\frac{1}{2}A\hat{D}B$ relativo ao segmento AB. Em outras palavras, $A\hat{C}B$ é um ângulo inscrito no círculo de centro D e raio $\overline{AD} = \overline{BD}$, correspondente ao ângulo central $A\hat{D}B$. Segue-se que o triângulo ACD é isósceles e portanto $A\hat{C}D = 30°$. Daí, $x = C\hat{D}B = 180° - B\hat{D}A - D\hat{A}C - A\hat{C}D = 180° - 100° - 30° - 30° = 20°$.



Q4. O responsável pela organização das prateleiras de um supermercado estava muito pensativo. Ele precisava organizar 168 biscoitos de chocolate e 120 biscoitos de morango e gostaria de organizá-los de acordo com as regras 1 e 2 abaixo. Sabendo que o organizador utilizou a menor quantidade de prateleiras possível respeitando os critérios de organização abaixo, assinale a alternativa que indica a quantidade total de prateleiras utilizadas.

1. Cada prateleira possua quantidades iguais de biscoitos;
2. Cada prateleira tenha apenas um sabor de biscoito.

(A) 5

(B) 7

(C) 10

(D) 11

(E) 12

Resposta: Item (E).

Solução: Para que a quantidade de prateleiras seja mínima, a quantidade de biscoitos em cada prateleira deve ser máxima. Além disso, precisamos que a quantidade de pacotes de biscoito em cada prateleira sejam iguais. Assim devemos encontrar o Máximo Divisor Comum entre 168 e 120. Temos que o $MDC(168, 120) = 24$, portanto deve-se ter 24 biscoitos por prateleira. Dessa forma há $168/24 = 7$ prateleiras com biscoitos de chocolate e $120/24 = 5$ com biscoitos de morango, totalizando 12 prateleiras.

Q5. Inspirado na famosa Sequência de Fibonacci, o π-raia resolver criar a sequência de π-bonacci a qual denotaremos por (P_n). Esta é uma sequência infinita, em que os dois primeiros termos são iguais a π e cada termo subsequente, a partir do terceiro, corresponde à soma dos dois termos anteriores. Abaixo temos um esquema dos primeiros termos desta sequência:

$$P_1 = \pi, \quad P_2 = \pi, \quad P_3 = 2\pi, \quad P_4 = 3\pi, \quad P_5 = 5\pi, \quad P_6 = 8\pi, \quad P_7 = 13\pi, \quad P_8 = 21\pi, \quad ...$$

Assinale a alternativa que contém uma afirmação FALSA.

(A) A sequência (P_n) é formada exclusivamente por números irracionais.

(B) Os números reais abaixo

$$63245985\pi, \quad 102334155\pi, \quad 165580140\pi, \quad 267914285\pi$$

não formam termos consecutivos da Sequência de *Pi-bonacci.*

(C) Os números reais abaixo

$$63245988\pi, \quad 102334156\pi, \quad 165580144\pi, \quad 267914300\pi$$

formam termos consecutivos da Sequência de *Pi-bonacci.*

(D) Sendo S_n a soma dos n primeiros termos da Sequência de π-bonacci,(*Pi-bonacci*) temos que $S_n = P_{n+2} - \pi$.

(E) A sequência de *Pi-bonacci* também pode ser dada por (T_n), em que $T_n = P_{n+2} - P_{n+1}$

Resposta: Item (C).

Solução:

(A) Como π é irracional, então $n\pi$ com $n \geq 1$ também será um número irracional.

(B) Perceba que o último número não corresponde a soma dos dois anteriores.

(C) Observe os coeficientes que multiplicam π. Não podemos ter quatro coeficientes pares consecutivos, pois isso indica que TODOS os coeficientes seriam pares, mas a sequência começa com os coeficientes 1 e 1.

(D) Note que

$$\begin{array}{rcl} P_{n+2} & = & P_{n+1} + P_n \\ P_{n+1} & = & P_n + P_{n-1} \\ P_n & = & P_{n-1} + P_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_4 & = & P_3 + P_2 \\ P_3 & = & P_1 + P_2 \end{array}$$

Somando todos os termos em ambos os lados da igualdade e simplificando os termos em comum, obtemos:

$$P_{n+2} = P_n + P_{n-1} + P_2 + P_1 + P_1 = S_n + P_1,$$

Portanto $S_n = P_{n+2} - P_1 = P_{n+2} - P_1 = P_{n+2} - \pi$.

(E) Perceba que $T_1 = P_3 - P_2 = 2\pi - \pi = \pi$ e $T_2 = P_4 - P_3 = 3\pi - 2\pi = \pi$. Perceba também que

$$T_k + T_{k+1} = (P_{k+2} - P_{k+1}) + (P_{k+3} - P_{k+2}) = (P_{k+3} + P_{k+2}) - (P_{k+2} + P_{k+1}) = P_{k+4} - P_{k+3} = T_{k+2}.$$

Isso nos diz que a sequência (T_n) possui a mesma recorrência e os dois primeiros termos da sequência de *Pi-bonacci*, logo representam uma mesma sequência.

Q6. Um número primo é dito *partido* quando ele pode ser escrito como a diferença de quadrados de dois inteiros positivos. Sendo p um número *partido*, em qual das alternativas há um possível resto da divisão de $9p + 2$ por 6.

(A) 1

(B) 2

(C) 2

(D) 4

(E) 5

Resposta: Item (E).

Solução Geral: Observe que $p = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, como p é primo e $(a - b) < (a + b)$, necessariamente $a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1$.

Portanto podemos escrever o número primo como $p = 2b+1$, assim $9p+2$ pode ser escrito na forma $9(2b+1)+2 = 18b + 11$. Como 6 divide 18, o resto da divisão de $9p + 2$ por 6 é o mesmo que o resto da divisão de 11 por 6 que é 5.

Solução Criativa: Note que 5 é super divisível, pois $5 = 3^2 - 2^2$. Perceba que $9 \cdot 5 + 2 = 47$ que dividido por 6 deixa resto igual a 5.

Q7. Uma determinada loja de livros de matemática resolveu fazer uma promoção que proporcionava 35% de desconto nos livros. Para obter o desconto, os clientes precisavam usar um cupom com um número de seis dígitos dado por $80AB35$ que é múltiplo de 99, e assim precisavam descobrir os valores de A e B. Assinale a alternativa abaixo que contém um possível valor de A.

(A) 2
(B) 5
(C) 7
(D) 8
(E) 9

Resposta: Item (D).

Solução: Note que $100 = 99 \cdot 1 + 1$, ou seja, o resto da divisão de 100 por 99 é 1. Observe que

$$80AB35 = 80 \cdot 100^2 + AB \cdot 100 + 35.$$

Portanto, $80 \cdot 100^2 + AB \cdot 100 + 35$ é múltiplo de 99. Como o resto da divisão de 100 por 99 é 1, o resto da divisão de $80AB35$ por 99 é o mesmo que o resto da divisão de $80 + AB + 35$ por 99. Logo,

$$80 + AB + 35 = 99q, \text{ para algum } q \in \mathbb{N}.$$

Dessa maneira,

$$AB = 99q - 80 - 35, \text{ para algum } q \in \mathbb{N}.$$

Testando os valores de q, quando $q = 1$ temos um valor negativo. Para $q = 2$ temos $AB = 83$ e, por fim, se $q > 2$ o resultado possui três ou mais dígitos, portanto o único valor possível é $A = 8$.

Q8. Suponha que 2021 pontos são postos no interior de um quadrado que está dividido em n quadrados menores iguais. Qual o maior valor de n que garante que um dos quadrados menores contém 10 desses pontos?

(A) 10

(B) 20

(C) 49

(D) 121

(E) 196

Resposta: Item (E)

Solução: Como o quadrado foi dividido em n quadrados menores iguais então n deve ser necessariamente um quadrado perfeito. Além disso, podemos observar que o resto da divisão de 2021 por 9 deixa quociente 224 e resto 5, isto é, $2021 = 224 \cdot 9 + 5$, onde 224 representaria o número de casas e o número de pombos é 9. Desde que o número de quadrados menores (casas) é um quadrado perfeito então a expansão de 2021 é dada por

$$2021 = 196 \cdot 10 + 61.$$

Usando o Princípio da casa dos pombos generalizada garantimos que algum subconjunto de 10 pontos são cobertos por algum dos 196 quadrados menores.

Q9. Considere a lista periódica conforme a situação na figura abaixo: A lista é ordenada, ou seja, o primeiro termo é o número 1, o segundo o número 2, o terceiro o número 3, o quarto o número 1 e assim por diante. Julgue as afirmações a seguir atribuindo (V) se a afirmação for VERDADEIRA e (F) se a afirmação for FALSA.

`1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 ...`

A - (V) (F) A sequência se repete a cada agrupamento de 7 números.

B - (V) (F) O número que ocupa a 2021ª posição é o número 3.

C - (V) (F) Observando a lista até o 2020º termo (incluindo este número), o número 3 aparece 336 vezes.

D - (V) (F) Olhando a lista até o 2019º termo (incluindo este número), o agrupamento 12 aparece 673 vezes.

E - (V) (F) Somando os primeiros 2018 números dessa sequência obtemos o valor 4371.

Resposta: FFFVV

Solução:

A - (F) Afirmação falsa. a sequência se repete a cada agrupamento de 6 números.

B - (F) Afirmação falsa. Como a sequência se repete a cada 6 números, dividindo 2021 por 6 obtemos quociente 336 e resto 5. Isso significa que teremos 336 sequências do agrupamento 123124 e mais 5 números, terminando assim no número 2.

C - (F) Afirmação falsa. Dividindo 2020 por 6 obtemos 336 como quociente e 4 como resto. Como o número 3 só aparece uma única vez em cada repetição, isso significa que o número 3 aparece 336 vezes e mais uma vez no restante dos 4 termos, ou seja, 337 vezes.

D - (V) Afirmação verdadeira. Perceba que a cada 6 termos, o agrupamento 12 aparece 2 vezes. Assim, dividindo 2019 por 6 obtemos um quociente 336 e resto 3. Portanto o agrupamento 12 aparece o dobro de vezes em cada repetição e mais uma vez no restante da sequência $2 \cdot 336 + 1 = 673$ vezes.

E - (V) Afirmação verdadeira. Dividindo 2018 por 6, obtemos quociente 336 e resto 2, portanto temos 336 agrupamentos dos números 123124 e mais os dois primeiros termos. Como $1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 4 = 13$, a soma de todos os termos será $13 \cdot 336 + 1 + 2 = 4371$.

Q10. Para uma festa do π-raia, os convidados foram identificados com um crachá que tinha os números da forma $3^a \cdot 7^b \cdot 11^c$, com $a \in \{0,1,2,3,4,5\}$, $b \in \{0,1,2,3,4\}$, e $c \in \{z \text{um número inteiro} | z \geq 0\}$. Verifique as afirmações a seguir atribuindo (V) se a afirmação for VERDADEIRA e (F) se a afirmação for FALSA.

A – (V) (F) O número de convidados, para cada c fixado, é múltiplo de 15.

B – (V) (F) Existe c, tal que, o número de convidados é ímpar.

C – (V) (F) A soma dos valores dos crachás dos convidados, para qualquer c, é sempre par.

D – (V) (F) A soma dos valores dos crachás dos convidados, para qualquer c, é sempre divisível por 13.

E – (V) (F) Existe c, tal que, a soma dos valores dos crachás dos convidados é divisível por 16.

Resposta: VFVVF

Solução:

A – (V) Afirmação verdadeira. Temos 6 opções para a escolha do expoente do 3 e 5 opções para o expoente do 7. Pelo Princípio Multiplicativo o número de convidados para cada c é $6 \times 5 = 30$.

B – (F) Afirmação falsa. pelo item anterior, o número de convidados para cada c é 30. Portanto é sempre uma quantidade par.

C – (V) Afirmação verdadeira. A soma s dos valores dos crachás dos convidados é dada por

$$s = (3^0 + 3^1 + \cdots + 3^5)(7^0 + 7^1 + \cdots + 7^4)(11^c)$$

s é o produto de duas progressões geométricas. Assim,

$$s = \left(\frac{3^6 - 1}{3 - 1}\right) \cdot \left(\frac{7^5 - 1}{7 - 1}\right) \cdot (11^c) = (364) \cdot (2801) \cdot (11^c).$$

fatorando s obtemos

$$s = (2^2 \cdot 7 \cdot 13) \cdot 2801 \cdot (11^c).$$

Claramente s é sempre par.

D – (V) Afirmação verdadeira. pelo item anterior s é divisível por 13.

E – (F) Afirmação falsa. Pelo item anterior, para cada valor de c temos

$$s = (2^2 \cdot 7 \cdot 13) \cdot 2801 \cdot (11^c).$$

Sendo $16 = 2^4$ e 2.801 ímpar, s não é divisível por 16 qualquer que seja o valor de c.