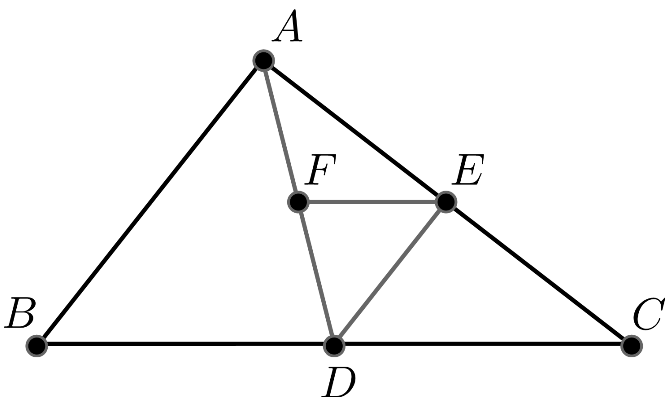
Olimpíada Pernambucana de Matemática 2021

NÍVEL 1

Caderno de Questões Com Resoluções

Q1. Considere um pedaço de cartolina com formato de uma região triangular ΔABC cuja medida da área é $48cm^2$. Em uma aula de Geometria Plana, pediu-se para que uma aluna construísse uma nova região triangular ΔDEF, em que D, E e F são pontos médios dos segmentos BC, CA e AD, respectivamente. Então podemos afirmar que a medida da área da região ΔDEF triangular é dada por:



(A) 9 cm^2.

(B) 8 cm^2.

(C) 7 cm^2.

(D) 6 cm^2.

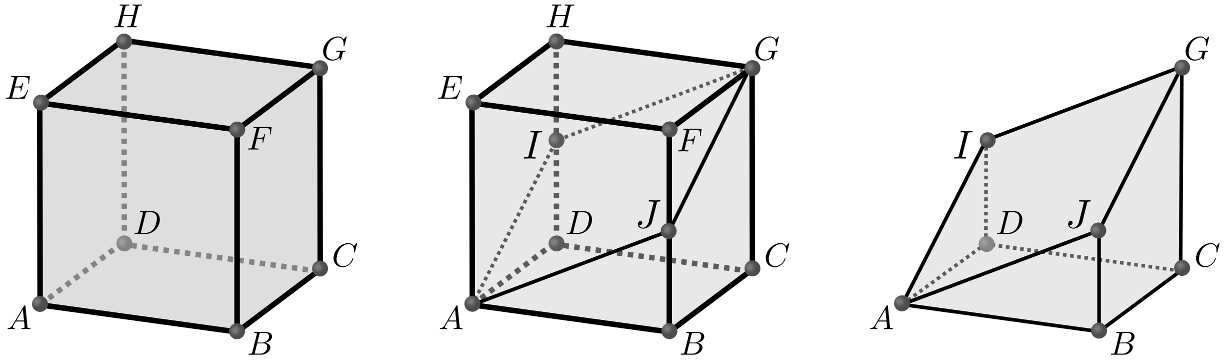
(E) 5 cm^2.

Resposta: Item (D).

Solução:

Como $\overline{BD} = \overline{DC} = \frac{\overline{BC}}{2}$ cm então a área do triângulo ΔADC vale 24 cm^2. Desde que $\overline{CE} = \overline{EA} = \frac{\overline{CA}}{2}$ cm então a área do triângulo ΔADE vale $\frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ cm^2. De maneira análoga, desde que $\overline{AF} = \overline{FD} = \frac{\overline{AD}}{2}$ cm então a área do triângulo ΔDEF vale $\frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ cm^2.

Q2. Edgar sempre gostou do jogo de quebra-cabeça chamado "Cubo Mágico" seu aniversário de 33 anos, a mãe de Edgar encomendou um bolo no formato de um cubo perfeito. Na hora de dar o primeiro pedaço do bolo, Edgar resolveu inovar com um corte na diagonal passando pelo vértice G, pelos pontos médios dos segmentos DH e BF e pelo vértice A, conforme a figura abaixo. Edgar deu a primeira parte retirada para a sua mãe. Em seguida ele fez outro corte retilíneo perfeito passando pelos vértices I, J e paralelo a base do bolo $ABCD$, e deu o pedaço de cima para seus dois filhos, Estela e Júlio. O restante do bolo (a base que restou) ele comeu com sua esposa Lorena. Com relação aos pedaços de sua mãe, de Júlio e Estela, e de Edgar e Lorena, que fração do bolo cada pedaço corresponde respectivamente?



(A) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ e $\frac{5}{9}$.

(B) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ e $\frac{4}{9}$.

(C) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$.

(D) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$.

(E) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{12}$ e $\frac{5}{12}$.

Resposta: Item (E).

Solução:
Por simetria, o primeiro corte divide o bolo ao meio, portanto a mãe de Edgar ficou com $1/2$ do bolo, e resta $1/2$ do bolo na mesa. O segundo corte divide o restante do bolo de modo que o pedaço de cima se encaixa na parte de baixo que sobra por simetria. Dessa forma, esse pedaço corresponde a $1/12$ do restante do bolo. Por fim, a fração que resta para Edgar e Lorena é o quanto falta para 1 inteiro, que é igual a $1 - 1/2 - 1/12 = 5/12$.

Q3. Um trem parte de Pirralândia às x horas, y minutos e z segundos, chegando em Pivelândia às y horas, z minutos e x segundos. O tempo de viagem foi de z horas, x minutos e y segundos. A partir dessas informações, podemos afirmar que uma possibilidade para o horário de partida do trem encontra-se no intervalo :

(A) Das 12:00:30 às 12:01:00

(B) Das 12:01:15 às 12:02:30

(C) Das 00:30:15 às 00:31:00

(D) Das 00:01:15 às 00:02:30

(E) Das 00:00:30 às 00:01:00

Resposta: Item (D).

Solução: Operando com o tempo em segundos, obtemos a seguinte equação algébrica

$$\begin{aligned}(3600y + 60z + x) - (3600x + 60y + z) &= 3600z + 60x + y \\ 3600(y - x - z) + 60(z - y - x) &= x + y - z. \qquad (1)\end{aligned}$$

Desde que $0 \leq x, y, z \leq 23$ e $x + y - z$ é múltiplo de 60 então a partir de (1) concluímos que $x + y - z = 0$, isto é, $z = x + y$, consequentemente, novamente a partir de (1), obtemos

$$60(y - x - z) = y + x - z,$$

o que mostra que $y - x - z = 0$. De $x + y - z = 0$ e $y - x - z = 0$ deduzimos que $x = 0$, o que por sua vez implica em $y = z$. Resulta que o horário de partida do trem é da forma 0 horas, y minutos e y segundos, onde $y \in \{0, \ldots, 23\}$.

Q4. No jogo de "*Resident Evil*" existe um *Puzzle* (quebra-cabeça) em um cofre cuja sequência é de 4 algarismos distintos e o primeiro algarismo é igual ao dobro do segundo, então o maior número de tentativas diferentes que devemos fazer para conseguir solucionar o desafio é igual a:

(A) 324

(B) 288

(C) 224

(D) 4000

(E) 2880

Resposta Item (C).

Solução: Como o primeiro algarismo é o dobro do segundo então temos apenas 4 possibilidades para os dois primeiros algarismos, isto é, temos as seguintes possibilidades, 2 e 1 ou 4 e 2 ou 6 e 3 ou 8 e 4. Como os algarismos são todos distintos e já foram usados os dois algarismos distintos então temos apenas 8 possibilidades para o terceiro algarismo e apenas 7 possibilidades para o último algarismo. Usando o princípio de contagem temos um total de $4 \times 8 \times 7 = 224$ possibilidades. Logo, o número máximo de tentativas distintas são 224.

Q5. O responsável pela organização das prateleiras de um supermercado estava muito pensativo. Ele precisava organizar 168 biscoitos de chocolate e 120 biscoitos de morango e gostaria de organizá-los de acordo com as regras 1 e 2 abaixo. Sabendo que o organizador utilizou a menor quantidade de prateleiras possível respeitando os critérios de organização abaixo, assinale a alternativa que indica a quantidade total de prateleiras utilizadas.

1. Cada prateleira possua quantidades iguais de biscoitos;
2. Cada prateleira tenha apenas um sabor de biscoito.

(A) 5

(B) 7

(C) 10

(D) 11

(E) 12

Resposta: Item (E).

Solução: Para que a quantidade de prateleiras seja mínima, a quantidade de biscoitos em cada prateleira deve ser máxima. Além disso, precisamos que a quantidade de pacotes de biscoito em cada prateleira sejam iguais. Assim devemos encontrar o Máximo Divisor Comum entre 168 e 120. Temos que o $MDC(168, 120) = 24$, portanto deve-se ter 24 biscoitos por prateleira. Dessa forma há $168/24 = 7$ prateleiras com biscoitos de chocolate e $120/24 = 5$ com biscoitos de morango, totalizando 12 prateleiras.

Q6. Um número de três dígitos é chamado *super ordenado* quando satisfaz as propriedades abaixo. Assinale a alternativa que contém a quantidade de números super ordenados compreendidos entre 100 e 999.

i. o último dígito é uma unidade maior do que o dígito central;

ii. invertendo a ordem dos dois primeiros dígitos obtemos um número que é 180 unidades menor.

(A) 6 números.

(B) 8 números.

(C) 9 números.

(D) 10 números.

(E) 12 números.

Resposta: Item (B).

Solução: Seja xyz um número *super ordenado* entre 100 e 999. Esse número possui expansão decimal $100x + 10y + z$, com $1 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$ e $0 \leq z \leq 9$. Pela primeira propriedade, devemos ter que $z = y + 1$ e daí podemos reescrevê-lo na forma $100x + 10y + (y + 1)$, com $1 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 8$. Observe que y é diferente de 9, pois se $y = 9$ teríamos $z = y + 1 = 10$, mas $z \leq 9$. Agora pela segunda propriedade, temos que

$$100x + 10y + (y + 1) - (100y + 10x + (y + 1)) = 180$$

e daí

$$x - y = 2 \quad ou \quad x = y + 2$$

Como $1 \leq x \leq 9$, devemos ter $0 \leq y \leq 7$. Atribuindo os possíveis valores de y, obtemos os números 201, 312, 423, 534, 645, 756, 867 e 978, totalizando 8 números.

Q7. No fim de 2008, João tinha um terço da idade de sua avó. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3920. Quantos anos João completa em 2021?

(A) 24

(B) 27

(C) 32

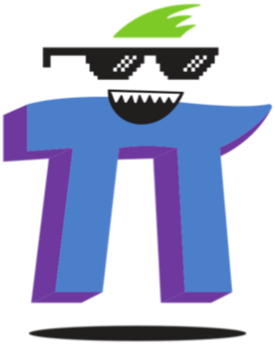
(D) 37

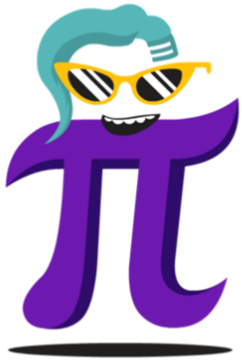
(E) 42

Resposta: Item (D).

Solução: Se x é a idade de João no final de 2008, então o ano em que nasceu é $2008 - x$ e o ano em que sua avó nasceu é $2008 - 3x$. Assim, temos $2008 - x + 2008 - 3x = 3920 \Leftrightarrow x = 24$. Em 2021 João completa $(2021 - 2008) + 24 = 37$ anos.

Q8. Em uma disputa do jogo *"Quebra de Números"* as torcidas dos times da π-veta e do π-raia ocuparam os lugares da arquibancada do estádio da Arena dos Números. A torcida do time da π-veta chegou antes e ocupou certa quantidade de lugares e quando a torcida do time do π-raia chegou, ela ocupou um terço dos lugares que havia sobrado na Arena. Além disso, as duas torcidas juntas ocuparam exatamente dois terços dos lugares. Qual a proporção dos lugares da arquibancada que foram ocupados pela torcida do time do π-raia?





(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{6}$

(D) $\frac{1}{8}$

(E) $\frac{3}{8}$

Resposta: Item (C).

Solução: Representando o número de lugares ocupados pelas torcidas da piveta e do pirraia por por π_v e π_r respectivamente, temos

$$\pi_r = \frac{1}{3} \times (1 - \pi_v) \Rightarrow \frac{1}{3}\pi_v + \pi_r = \frac{1}{3}.$$

Como $\pi_v + \pi_r = \frac{2}{3}$, temos $\frac{2}{3}\pi_v = \frac{1}{3}$, logo $\pi_v = \frac{1}{2}$ e $\pi_r = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \Rightarrow \pi_r = \frac{1}{6}$.

Q9. Considere a lista periódica conforme a situação na figura abaixo: A lista é ordenada, ou seja, o primeiro termo é o número 1, o segundo o número 2, o terceiro o número 3, o quarto o número 1 e assim por diante. Julgue as afirmações a seguir atribuindo (V) se a afirmação for VERDADEIRA e (F) se a afirmação for FALSA.

`1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 ...`

A - (V) (F) A sequência se repete a cada agrupamento de 7 números.

B - (V) (F) O número que ocupa a 2021ª posição é o número 3.

C - (V) (F) Observando a lista até o 2020º termo (incluindo este número), o número 3 aparece 336 vezes.

D - (V) (F) Olhando a lista até o 2019º termo (incluindo este número), o agrupamento 12 aparece 673 vezes.

E - (V) (F) Somando os primeiros 2018 números dessa sequência obtemos o valor 4371.

Resposta: FFFVV

Solução:

A - (F) Falso, a sequência se repete a cada agrupamento de 6 números.

B - (F) Falso, como a sequência se repete a cada 6 números, dividindo 2021 por 6 obtemos quociente 336 e resto 5. Isso significa que teremos 336 sequências do agrupamento 123124 e mais 5 números, terminando assim no número 2.

C - (F) Falso, dividindo 2020 por 6 obtemos 336 como quociente e 4 como resto. Como o número 3 só aparece uma única vez em cada repetição, isso significa que o número 3 aparece 336 vezes e mais uma vez no restante dos 4 termos, ou seja, 337 vezes.

D - (V) Verdadeiro, perceba que a cada 6 termos, o agrupamento 12 aparece 2 vezes. Assim, dividindo 2019 por 6 obtemos um quociente 336 e resto 3. Portanto o agrupamento 12 aparece o dobro de vezes em cada repetição e mais uma vez no restante da sequência: $2 \cdot 336 + 1 = 673$ vezes.

E - (V) Verdadeiro, dividindo 2018 por 6, obtemos quociente 336 e resto 2, portanto temos 336 agrupamentos dos números 123124 e mais os dois primeiros termos. Como $1+2+3+1+2+4 = 13$, a soma de todos os termos será $13 \cdot 336 + 1 + 2 = 4371$.

Q10. O π-raia e seus amigos se reúnem para jogar um jogo de *RPG* chamado "Números & Dragões". Durante a aventura imaginária, o π-raia parte em busca do tesouro do dragão Kruskal. Nesta jornada, o π-raia acaba se perdendo na Floresta de Steiner. Sem esperanças de encontrar um meio de sair da floresta, ele encontra um feiticeiro chamado Leibniz, que o oferece comida e diz que se o π-raia conseguir responder as suas perguntas, mostrará a saída da floresta. O curioso feiticeiro faz aparecer na frente do π-raia três urnas e três bolas e, voltando-se para o π-raia, faz cinco afirmações, que devem ser julgadas e respondidas com VERDADEIRO (V) ou FALSO (F):

A - (V) (F) Há 9 maneiras de colocar as 3 bolas nas 3 urnas, se as urnas e as bolas são todas distintas.

B - (V) (F) Há 9 maneiras de colocar as 3 bolas nas 3 urnas, se as urnas são todas distintas, as bolas são todas distintas e nenhuma urna pode conter mais do que uma bola.

C - (V) (F) Há 3 maneiras de colocar as 3 bolas nas 3 urnas, se as urnas são todas iguais e as bolas são todas iguais.

D - (V) (F) Há 16 maneiras de colocar as 3 bolas nas 3 urnas, se as urnas são todas distintas e as bolas são todas iguais.

E - (V) (F) Há 6 maneiras de colocar as 3 bolas nas 3 urnas, se as urnas são todas iguais e as bolas são todas distintas.

Resposta: FFVFF

Solução:

A - (F) Falso. Há 3 possibilidades para escolher a urna da primeira bola, 3 possibilidades para escolher a urna da segunda bola, e assim por diante. Pelo princípio multiplicativo, há $3^3 = 27$ modos de fazer isso.

B - (F) Falso. Há 3 possibilidades para escolher a urna da primeira bola, 2 possibilidades para escolher a urna da segunda bola, e 1 possibilidade para a urna da última bola. Pelo princípio multiplicativo, há $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ modos de fazer isso.

C - (V) Verdadeiro. Há 3 casos possíveis:

(i) 3 bolas em uma única urna;

(ii) 2 bolas em uma urna e 1 bola em outra urna;

(iii) 1 bola em cada urna.

D - (V) Verdadeiro. Considerando os casos do item anterior, temos:

(i) Temos 3 modos de escolher a urna que irá receber as 3 bolas;

(ii) Temos 3 modos de escolher a urna que irá receber 2 bolas e 2 modos de escolher a urna que irá receber 1 bola, totalizando 6 modos;

(iii) Há apenas 1 modo de distribuir 1 bola em cada urna.

Portanto, pelo princípio aditivo, temos $3 + 6 + 1 = 10$ modos.

E - (F) Falso. Considerando os casos do terceiro item, temos:

(i) Há um modo de distribuir as 3 bolas em uma única urna;

(ii) Há 3 modos de escolher a bola que será colocada sozinha em uma urna;

(iii) Há um modo de distribuir uma bola em cada urna.

Portanto, pelo princípio aditivo, temos $1 + 3 + 1 = 5$ modos.