



Olimpíada Pernambucana de Matemática 2023  
Primeira Fase - Nível 2 (8<sup>o</sup> e 9<sup>o</sup> anos)

**OPEMAT** CADERNO DE QUESTÕES E SOLUÇÕES

**REALIZAÇÃO:**



**APOIO:**



**LEIA AS INSTRUÇÕES ABAIXO ANTES DE INICIAR A PROVA!**

01. Só abra este caderno após ler **todas** as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.
02. Preencha os dados pessoais.
03. A prova é composta de 12 questões de múltipla escolha: Para cada questão será atribuído um valor máximo de 10 pontos, totalizando 120 pontos.
04. Para marcar a resposta, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul com o modelo:  

05. A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.
06. Marcações duplas, em branco ou diferentes do exemplo acima serão desconsideradas.
07. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.
08. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.
09. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.
10. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.
11. É de responsabilidade do(da) estudante verificar se a prova está legível antes de entregá-la.
12. Se a Comissão verificar que uma questão é ambígua, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, serão distribuídos entre as demais questões.
13. Duração da prova: 2 horas e 30 minutos.

NOME: \_\_\_\_\_

NÚMERO DA IDENTIDADE: \_\_\_\_\_ ÓRGÃO EXPEDIDOR: \_\_\_\_\_

ASSINATURA: \_\_\_\_\_

# CARTÃO RESPOSTA



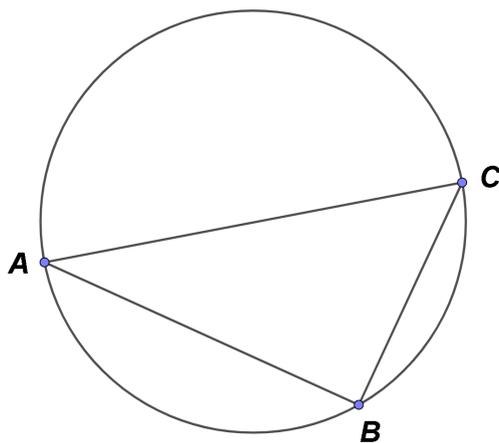
Pi-raia  
 $\pi$ -raia

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(A)											
(B)											
(C)											
(D)											
(E)											



Pi-veta  
 $\pi$ -veta

**Q1.** Considere o triângulo  $ABC$  inscrito numa circunferência cujo diâmetro é o segmento  $AC$ , de acordo com a figura abaixo:



Assuma que  $AC = 1$ ,  $AB = a$  e  $BC = b$  de maneira que  $ab = \frac{1}{3}$ . O valor de  $a^4 + b^4$  é:

- (A)  $\frac{1}{9}$
- (B)  $\frac{3}{9}$
- (C)  $\frac{5}{9}$
- (D)  $\frac{7}{9}$
- (E)  $\frac{9}{9}$

**SOLUÇÃO:** Como um dos lados do triângulo  $\triangle ABC$  inscrito é o diâmetro da circunferência, então tal triângulo é retângulo, cuja hipotenusa vale  $AC = 1$  e os catetos medem  $AB = a$  e  $BC = b$ . Pelo Teorema de Pitágoras, vale a seguinte relação:

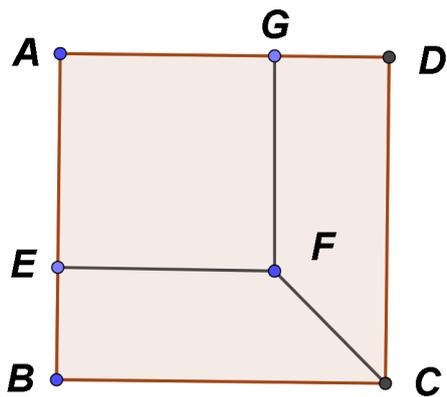
$$a^2 + b^2 = 1.$$

Sabendo que  $ab = \frac{1}{3}$  e usando as seguintes manipulações algébricas, temos

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2 \\ &= 1^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

**Q2.** Considere o quadrado  $ABCD$  cujo lado mede  $3\text{cm}$ . Construa um novo quadrado  $AEFG$  tal que  $EB = 1\text{cm}$ , de acordo com a figura abaixo:



A área do trapézio  $CDGF$  em  $\text{cm}^2$  é:

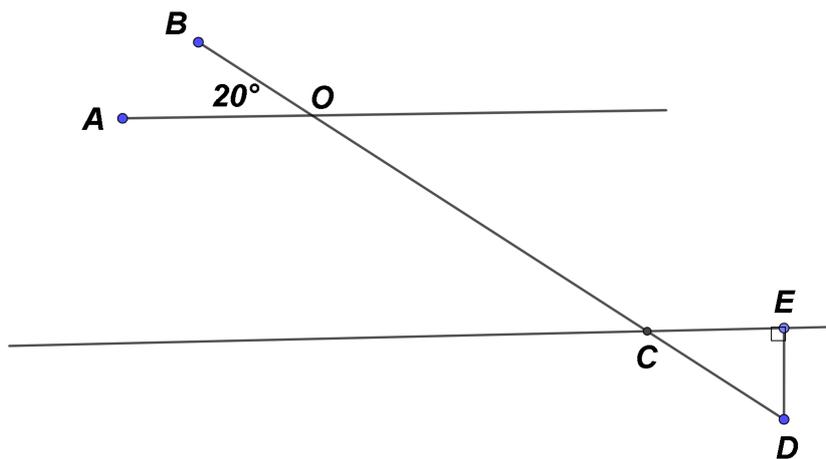
- (A) 1
- (B) 1,5
- (C) 2
- (D) 2,5
- (E) 3

**SOLUÇÃO:** De acordo com a figura, basta observar que  $CD = 3$ ,  $FG = 3 - 1 = 2$  e  $GD = 1$ . Usando a fórmula clássica da área do trapézio, concluímos que a área do trapézio em  $cm^2$  a qual denotaremos por  $A$  é dada por:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(CD + FG) \cdot DG}{2} \\ &= \frac{(3 + 2) \cdot 1}{2} \\ &= \frac{5}{2} \\ &= 2,5. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (D).

**Q3.** Os segmentos  $AO$  e  $CE$  são paralelos, de acordo com a figura abaixo:



Assumindo que o ângulo  $\hat{AOB} = 20^\circ$  e o ângulo  $\hat{CED} = 90^\circ$ , podemos concluir que o ângulo  $\hat{CDE}$  vale:

- (A)  $40^\circ$
- (B)  $50^\circ$
- (C)  $60^\circ$
- (D)  $65^\circ$
- (E)  $70^\circ$

**SOLUÇÃO:** Como os segmentos  $AO$  e  $CE$  são paralelos, então pela relação dos ângulos alternos externos, concluímos que  $AOB = DCE = 20^\circ$ . Desde que o triângulo  $\triangle CDE$  é retângulo em  $E$  e sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale  $180^\circ$ , então segue que o ângulo  $CDE$  vale  $70^\circ$ .

Portanto, a alternativa correta é a letra  $(E)$ .

**Q4.** Considere a equação

$$x^8 + 2x^6 + 6x^4 + 2x^2 - 15 = 0.$$

Então o número de soluções reais e distintas da equação acima é:

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 4
- (E) 8

**SOLUÇÃO:** Observe que

$$\begin{aligned}x^8 + 2x^6 + 6x^4 + 2x^2 - 15 &= 0 \implies \\x^8 + 2x^6 + 6x^4 + 2x^2 &= 15 \implies \\x^8 + 2x^6 + 6x^4 + 2x^2 + 1 &= 2^4 \implies \\(x^2 + 1)^4 &= 2^4 \implies \\x^2 + 1 &= 2 \implies \\x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 1.\end{aligned}$$

Portanto, a equação acima possui duas soluções reais e distintas, assim podemos concluir que a alternativa correta é a letra (C).

**Q5.** Considere a função  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f_n(x) = (x - n)(x - n + 1).$$

O valor mínimo da função  $f_n$  é:

- (A)  $-\frac{1}{4}$
- (B) 0
- (C) 1
- (D)  $1 - n$
- (E)  $n$

**SOLUÇÃO:** Observe que

$$\begin{aligned}f_n(x) &= (x - n)(x - n + 1) \\&= x^2 - (2n - 1)x + n^2 - n \\&= \left[ x - \frac{2n - 1}{2} \right]^2 - \left[ \left( \frac{2n - 1}{2} \right)^2 - n^2 + n \right] \\&= \left[ x - \frac{2n - 1}{2} \right]^2 - \left[ \frac{4n^2 - 4n + 1 - 4n^2 + 4n}{4} \right] \\&= \left[ x - \frac{2n - 1}{2} \right]^2 - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

O que mostra que o mínimo da função  $f_n$  vale  $-\frac{1}{4}$  e ocorre quando  $x = \frac{2n - 1}{2}$ .

Portanto, a alternativa correta é a letra (A).

6. Seja  $x$  o valor da expressão numérica

$$\frac{\sqrt[3]{0,125} \cdot (0,5)^{-3} \cdot 4^{16}}{4^{17}}.$$

Qual o valor de  $x$ ?

- (A) 0,5
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 4
- (E) 8

**SOLUÇÃO:** Lembrando que

$$x = \frac{\sqrt[3]{0,125} \cdot (0,5)^{-3} \cdot 4^{16}}{4^{17}} = \frac{\sqrt[3]{2^{-3}} \cdot (2^{-1})^{-3} \cdot 2^{32}}{2^{34}} = 1.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (B).

7. Os números naturais  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  e  $s$  são formados por 3 algarismos não nulos. Assumindo que estes números são distintos e formados pelos mesmos algarismos, então  $m + n + p + q + r + s$  é um múltiplo de:

- (A) 10
- (B) 100
- (C) 110
- (D) 200
- (E) 222

**SOLUÇÃO:** Considere  $a$ ,  $b$  e  $c$  os dígitos distintos dos números  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  e  $s$ . Logo,

$$m = abc = 100a + 10b + c$$

$$n = bac = 100b + 10a + c$$

$$p = acb = 100a + 10c + b$$

$$q = bca = 100b + 10c + a$$

$$r = cab = 100c + 10a + b$$

$$s = cba = 100c + 10b + a.$$

Consequentemente,

$$m + n + p + q + r + s = 222(a + b + c),$$

o que mostra que a soma é múltiplo de 222.

Portanto, a alternativa correta é a letra (*E*).

8. Seja  $n$  um número inteiro positivo. Defina o número  $n^*$  por

$$n^* = (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Por exemplo,

$$6^* = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Dentre as alternativas abaixo, marque a que exibe o número de divisores primos de  $21^*$  é:

- (A) 2
- (B) 8
- (C) 10
- (D) 11
- (E) 21

**SOLUÇÃO:** Observe que

$$\begin{aligned}21^* &= 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= (2^2 \cdot 5) \cdot 19 \cdot (2 \cdot 3^2) \cdot 17 \cdot (2^4) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 7) \cdot 13 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 3^3 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.\end{aligned}$$

Portanto, o número de divisores distintos maiores do que 1 do número  $21^*$  é 8, o que mostra que a alternativa correta é a letra (B).

9. Dizemos que um número positivo de três dígitos não nulos é dito **médio** se o seu dígito central é o valor médio dos seus dígitos extremos. Por exemplo, 543 é um número médio pois  $4 = \frac{5+3}{2}$ . Podemos afirmar que a quantidade de números médios é:

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 9
- (D) 10
- (E) 81

**SOLUÇÃO:** Seja  $n = abc$  um número médio tal que  $b = \frac{a+c}{2}$ .

Se  $b = 1$ , então  $\frac{a+c}{2} = 1 \implies a+c = 2$ , o que mostra que 111 é o único número médio quando  $b = 1$ .

Se  $b = 2$ , então  $\frac{a+c}{2} = 2 \implies a+c = 4$ , o que mostra que 123, 222 e 321 são os únicos números médios quando  $b = 2$ .

Se  $b = 3$ , então  $\frac{a+c}{2} = 3 \implies a+c = 6$ , o que mostra que 135, 234, 333, 432 e 531 são os únicos números médios quando  $b = 3$  e assim sucessivamente, isto é,

se  $b = k \leq 9$ , então temos um total de  $2k - 1$  números médios.

Logo, o total de números médios é dado por

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 81.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (E).

**10.** Quantos números entre 99 e 1000 tem a propriedade de que qualquer dois dígitos adjacentes diferem por uma unidade e tem todos os seus dígitos diferentes? Por exemplo, 123, 789, 654.

- (A) 14
- (B) 21
- (C) 28
- (D) 35
- (E) 42

**SOLUÇÃO:** De forma geral, se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são dígitos consecutivos, então  $abc$  e  $cba$  são os números procurados. Desde que  $1 \leq a \leq 7$ , então temos um total de  $2 \cdot 7 = 14$  números. Portanto, a alternativa correta é a letra (A).

**11.** Defina

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

O valor de

$$\sum_{n=1}^{10000} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

é:

- (A)  $\frac{1}{100}$
- (B)  $\frac{10}{100}$
- (C)  $\frac{99}{100}$
- (D)  $\frac{100}{100}$
- (E) 100

**SOLUÇÃO:** Note que

$$\sum_{n=1}^{10000} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{10000}} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}. \quad (1)$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (C).

**12.** Numa construção geométrica, os pontos  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{11}$  são distintos e colineares. Sabendo que entre dois pontos  $P_i$  e  $P_{i+1}$  existem exatamente  $3^i$  retas perpendiculares ao segmento  $P_iP_{i+1}$ . Podemos concluir que a quantidade de retas perpendiculares ao segmento  $P_1P_{11}$  é:

(A)  $3^{11}$

(B)  $3^{11} - 1$

(C)  $3^{11} - 3$

(D)  $\frac{3^{11} - 3}{2}$

(E)  $\frac{3^{11} + 3}{2}$

**SOLUÇÃO:** A quantidade de retas perpendiculares ao segmento  $P_1P_{11}$  vale

$$S = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{10}.$$

Multiplicando a relação acima por 3, obtemos

$$3S = 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{10} + 3^{11}$$

Subtraindo as relações acima, concluímos que

$$3S - S = -3 + 3^{11}.$$

Logo,

$$S = \frac{3^{11} - 3}{2}.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (D).